Matematika 1 **Izročki: 6. teden**

Vektorski prostor in podprostor. Linearne preslikave.

Polona Oblak

1. Vektorski prostor

Realni vektorski prostor V je množica *vektorjev* $v \in V$, za katere imamo definirani dve notranji operaciji

- seštevanje vektorjev ($u, v \in V \Longrightarrow u+v \in V$) in
- množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha v = \alpha \cdot v \in V$),

z lastnostmi

(VP1) $u + v = v + u$ in $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(VP2) obstaja *ničelni vektor* $\mathbf{0}$ in velja $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v$,
(VP3) za vsak $v \in V$ obstaja *nasprotni vektor* $-v$, za katerega velja $v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$,
(VP4) $1 \cdot v = v$ za vsak $v \in V$,
(VP5) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$,
(VP6) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$,
(VP7) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

za poljubne $u, v, w \in V$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pri tem bomo, kot običajno v matematiki, simbol $\cdot$ pri produktu vektorja s številom večinoma izpuščali. Torej bomo pisali tudi $\alpha v = \alpha \cdot v$.

Izrek 1. *Naj bo V vektorski prostor. Potem velja*

(1) $0 \cdot v = \mathbf{0}$ *za vsak* $v \in V$,
(2) V *vsebuje ničelni vektor* $\mathbf{0}$,
(3) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ *za vsak* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Za vektorje $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ in skalarje $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ imenujemo vektor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Denimo, ničelni vektor $\mathbf{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$ je linearna kombinacija poljubnih vektorjev $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Linearno kombinacijo z izključno ničelnimi koeficienti imenujemo *trivialna* linearna kombinacija.

2. Vektorski podprostor

Če je podmnožica U vektorskega prostora V

(VPP1) zaprta za seštevanje ($u, v \in U \Longrightarrow u + v \in U$) in
(VPP2) zaprta za množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in U$, $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha v \in U$),

potem jo imenujemo *vektorski podprostor* prostora V.

Izrek 2. *Podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je poljubna linearna kombinacija $\alpha u + \beta v$ vektorjev $u, v \in U$ tudi vsebovana v U.*

Vsak vektorski podprostor po (VPP2) vsebuje tudi vektor $0 \cdot v = \mathbf{0}$. Zatorej podmnožica vektorskega prostora, ki ne vsebuje ničelnega vektorja, ne more biti vektorski podprostor.

Ker lastnosti (VP1)-(VP7) veljajo za poljubne elemente vektorskega prostora V, veljajo tudi za vse elemente vektorskega podprostora U v V. Poleg tega je vektorski podprostor po definiciji zaprt za seštevanje in množenje s števili. Zatorej je vsak vektorski podprostor hkrati tudi vektorski prostor.

Linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ker je linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ zopet linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, je po Izreku **??** linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearni podprostor v V. Pravimo, da vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *napenjajo* prostor $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Izrek 3. *Linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorskega prostora V je najmanjši vektorski podprostor v V, ki vsebuje vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

3. Baza vektorskega prostora

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so *linearno odvisni*, ko obstaja vektor v_k, ki je linearna kombinacija ostalih $v_1, v_2 \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$:

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n,$$

kjer $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so *linearno neodvisni*, če niso linearno odvisni. Ekvivalentno, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka ničelnemu vektorju $\mathbf{0}$. Z drugimi besedami, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so linearno neodvisni, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Če množica vektorjev vsebuje ničelni vektor $\mathbf{0}$, potem lahko ničelni vektor izrazimo kot trivialno linearno kombinacijo ostalih vektorjev. Zato je vsaka množica, ki vsebuje ničelni vektor, linearno odvisna.

Naj vektorji $u_1, u_2, \ldots, u_m$ napenjajo vektorski prostor $V = \mathcal{L}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Če so $u_1, u_2, \ldots, u_m$ linearno odvisni, potem obstaja podmnožica $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq$

$\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, ki prav tako napenja prostor V. Najmanjšo takšno podmnožico bomo imenovali *baza* vektorskega prostora. Dobimo jo tako, da iz množice $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ izberemo čim manj vektorjev (torej bodo linearno neodvisni), a bodo še vedno napenjali prostor V.

Množica vektorjev $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je *baza* vektorskega prostora V, če

(B1) so $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno neodvisni in
(B2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ napenjajo prostor V.

Izrek 4. *Vsak vektorski prostor ima nešteto baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.*

Dimenzija prostora V je enaka moči (poljubne) baze prostora V. Označimo jo z $\dim V$.

Izrek 5. *Za vsako bazo vektorskega prostora V je zapis poljubnega vektorja $v \in V$ kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.*

4. Linearne preslikave, definicija

Naj bosta V in U vektorska prostora. Preslikava $\tau\colon V \to U$ je *linearna preslikava*, če velja

(LP1) $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$ za vsaka $v, u \in V$ in
(LP2) $\tau(\alpha v) = \alpha\tau(v)$ za vsak $v \in V$ in vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.

Izrek 6. *Preslikava $\tau\colon V \to U$ je linearna natanko tedaj, ko velja*

$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u) \tag{1}$$

za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Izrek 7. *Za poljubno linearno preslikavo $\tau\colon V \to U$ velja $\tau(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_U$.*

5. Operacije z linearnimi preslikavami

Naj bodo $\tau, \psi\colon V \to U$ ter $\theta\colon U \to W$ linearne preslikave in naj bo $\gamma \in \mathbb{R}$.

(1) *Vsota* $\tau + \psi\colon V \to U$ je preslikava, definirana s predpisom
$$(\tau + \psi)(v) = \tau(v) + \psi(v).$$
(2) *Produkt s skalarjem* $\gamma\tau\colon V \to U$ je preslikava, definirana s predpisom
$$(\gamma\tau)(v) = \gamma\,\tau(v).$$
(3) *Kompozitum* $\theta \circ \tau$ je preslikava $\theta \circ \tau\colon V \to W$ definirana s predpisom
$$(\theta \circ \tau)(v) = \theta(\tau(v)).$$

Izrek 8. *Vsota, produkt s skalarjem in kompozitum linearnih preslikav so linearne preslikave.*

Izrek 9. *Množica vseh linearnih preslikav iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U je vektorski prostor.*

6. Matrike linearne preslikave

Naj bosta V in U vektorska prostora dimenzij m in n ter $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava. Izberimo bazi $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ prostora V in $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ prostora U.

Denimo, da poznamo slike $\tau(b_1), \tau(b_2), \ldots, \tau(b_m)$ vektorjev baze $\mathcal{B}$ preko preslikave τ. Izberimo poljubni vektor $v \in V$ in ga zapišimo kot linearno kombinacijo

$$v = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m$$

baznih vektorjev množice $\mathcal{B}$. Ker je τ linearna preslikava, lahko nato sliko $\tau(v)$ vektorja izračunamo kot

$$\tau(v) = \tau\left(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m\right) = \beta_1 \tau(b_1) + \beta_2 \tau(b_2) + \ldots + \beta_m \tau(b_m).$$

Tako smo ugotovili, da lahko s pomočjo slik baznih vektorjev izračunamo sliko poljubnega vektorja $v \in V$.

Sedaj pa razvijmo slike vektorjev baze $\mathcal{B}$, ki se nahajajo v vektorskem prostoru U, po bazi $\mathcal{C}$. Torej, za $j = 1, \ldots, m$, vsako sliko $\tau(b_j)$ zapišimo kot linearno kombinacijo vektorjev množice $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$:

$$\tau(b_j) = \alpha_{1j} c_1 + \alpha_{2j} c_2 + \ldots + \alpha_{nj} c_n.$$

S tem smo dobili $m \cdot n$ enolično določnih koeficientov α_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Naj bo $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} = [\alpha_{ij}]$ matrika reda $n \times m$ sestavljena iz koeficientov v razvoju slik baznih vektorjev $\mathcal{B}$ po bazi $\mathcal{C}$.

Tako definirano matriko

$$A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

imenujemo *matrika linearne preslikave τ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$*.

V njej j-ti stolpec predstavlja koeficiente, s katerimi se slika j-tega vektorja baze $\mathcal{B}$ izraža kot linearna kombinacija vektorjev baze $\mathcal{C}$.

Matrika $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ nam torej preslika koeficiente v razvoju vektorja po bazi $\mathcal{B}$ v koeficiente, če sliko vektorja razvijemo po bazi $\mathcal{C}$. Povedano formalno, če je $v = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j b_j$ in $\tau(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i c_i$, potem lahko koeficiente γ_j dobimo tudi z matričnim množenjem

$$
\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}. \tag{2}
$$

Posebej opozorimo, da je matrika $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ odvisna od izbire baz $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ vektorskih prostorov V in U. Če bi si izbrali drugačni bazi (ali vsaj eno od njiju), potem bi isti preslikavi priredili drugo matriko (ki ustreza koeficientom v razvoju po drugih bazah).

Dogovorimo se, da če bomo iskali matriko preslikave $\tau\colon V \to V$ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}$, bomo pri tem opustili enega od indeksov, t.j. $A_{\tau,\mathcal{B}} = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Izrek 10. *Naj bodo $\tau, \psi\colon V \to U$ ter $\theta\colon U \to W$ linearne preslikave in naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(1) *Matrika, ki ustreza vsoti preslikav $\tau + \psi$, je enaka vsoti matrik posameznih preslikav.*

$$A_{\tau+\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}} = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} + A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

(2) *Matrika, ki ustreza produktu s skalarjem $\alpha\tau$, je enaka večkratniku matrike preslikave.*

$$A_{\alpha\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \alpha A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

(3) *Matrika, ki ustreza kompozitumu preslikav, je enaka produktu matrik posameznih preslikav.*

$$A_{\theta\circ\tau,\mathcal{B},\mathcal{D}} = A_{\theta,\mathcal{C},\mathcal{D}} \cdot A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

(4) *Matrika, ki ustreza inverzu obrnljive preslikave, je enaka inverzu matrike te preslikave. Torej, če je ψ obrnljiva preslikava, je obrnljiva tudi matrika $A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Velja*

$$A_{\psi^{-1},\mathcal{C},\mathcal{B}} = (A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}})^{-1}.$$

Denimo, da poznamo matriko $A = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ linearne preslikave $\tau\colon V \to U$ iz baze $\mathcal{B}$ v $\mathcal{C}$. Radi bi zapisali matriko $A' = A_{\tau,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$ iste linearne preslikave τ, a iz neke (morda) druge baze $\mathcal{B}'$ v (morda) drugo bazo $\mathcal{C}'$.

Če si ogledamo spodnji diagram matrik, ki utrezajo preslikavam, potem poznamo "zeleno" matriko $A = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$, želimo pa izračunati "rdečo" matriko $A' = A_{\tau,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$ linearne preslikave τ.

$$
\begin{tikzcd}
(V,\mathcal{B}) \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift left, "P"] & & (U,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q"'] \\
(V,\mathcal{B}') \arrow[u, shift left, "P^{-1}"] \arrow[rr, "A' = QAP^{-1}"'] & & (U,\mathcal{C}')
\end{tikzcd}
$$

Pri tem matrika $P = \mathcal{I}_{V,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ustreza identični preslikavi prostora V vase iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}'$. Takšno matriko dobimo s koeficienti pri razvoju vektorjev baze $\mathcal{B}$ po vektorjih baze $\mathcal{B}'$. Podobno je $Q = \mathcal{I}_{U,\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ ustreza identični preslikavi prostora U vase iz baze $\mathcal{C}$ v bazo $\mathcal{C}'$ in je sestavljena iz koeficientov pri razvoju vektorjev baze $\mathcal{C}$ po vektorjih baze $\mathcal{C}'$. Če se v diagramu sprehodimo po puščicah, vidimo, da bomo morali matriko A' sestaviti kot kompozitum preslikav. Zatorej je A' enak produktu pripadajočih matrik, t.j.

$$A' = QAP^{-1}.$$

7. Lastne vrednosti linearne preslikave

Neničelnemu vektorju $v \in V$ pravimo *lastni vektor* linearne preslikave $\tau \colon V \to V$, če velja

$$\tau(v) = \lambda v.$$

Številu λ pravimo *lastna vrednost* linearne preslikave τ.

Izrek 11. *Vsaka lastna vrednost linearne preslikave τ je tudi lastna vrednost poljubne matrike A_τ, ki pripada preslikavi τ. Vse matrike, ki pripadajo dani linearni preslikavi τ imajo enake lastne vrednosti.*

Pravimo, da je linearno preslikavo $\tau \colon V \to V$ mogoče *diagonalizirati*, če obstaja baza, v kateri pripada preslikavi τ diagonalna matrika.

Izrek 12. *Linearno preslikavo $\tau \colon V \to V$ je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja baza prostora V sestavljena iz lastnih vektorjev preslikave τ.*

8. Jedro in slika linearne preslikave

Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava vektorskega prostora V v vektorski prostor U. *Jedro* linearne preslikave τ je množica $\ker(\tau)$ vseh vektorjev $v \in V$, za katere velja
$$\tau(v) = 0.$$
Slika linearne preslikave je množica $\mathrm{im}(\tau) = \{\tau(v)\colon v \in V\} \subseteq U$.

Izrek 13. *Jedro $\ker\tau$ linearne preslikave $\tau\colon V \to U$ je vektorski podprostor v V, slika $\mathrm{im}\,\tau$ pa vektorski podprostor v U.*

Izrek 14. *Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U.*

(1) *τ je injektivna natanko tedaj, ko je $\ker\tau = \{0\}$.*
(2) *τ je surjektivna natanko tedaj, ko je $\mathrm{im}\,\tau = U$.*

Naj bo A_τ matrika, ki pripada linearni preslikavi $\tau\colon V \to U$ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$. Po definiciji je jedro linearne preslikave τ množica vseh vektorjev v, za katere velja $\tau(v) = 0$. Če razvijemo vektor v po bazi $\mathcal{B}$, so koeficienti v razvoju določeni s stolpcem $x = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]^T$. Spomnimo se enakosti (**??**). Ker ima slika $\tau(v) = 0$ v razvoju po bazi $\mathcal{C}$ vse koeficiente enake 0, velja $A_\tau x = 0$. (Z drugimi besedami, vektorji koeficientov v razvoju vektorjev iz $\ker\tau$ po bazi $\mathcal{B}$ ustrezajo natanko ničelnemu prostoru matrike A_τ.)

Podobno si pomagamo z enakostjo (**??**), da bi določili $\mathrm{im}\,\tau$. Po definiciji je $\mathrm{im}\,\tau$ množica vseh slik linearne preslikave, torej množica vseh linearnih kombinacij slik vektorjev iz baze $\mathcal{B}$. Z drugimi besedami,
$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \\ \vdots\\ \\ \gamma_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m}\\ \\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix} = A^{(1)}\beta_1 + A^{(2)}\beta_2 + \ldots + A^{(m)}\beta_m,$$
kjer z A^j označimo j-ti stolpec matrike $A_\tau = [\alpha_{ij}]$. Torej so vektorji koeficientov $[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]^T$ natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A_τ. Sledi, da linearna ogrinjača stolpcev natanko določa koeficiente vektorjev v $\mathrm{im}\,\tau$ pri razvoju po bazi $\mathcal{C}$. (Z drugimi besedami, koeficienti pri razvoju vektorjev iz $\mathrm{im}\,\tau$ po bazi $\mathcal{C}$ ustrezajo stolpčnemu prostoru matrike A_τ.)

Izrek 15. *Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava in naj bo $A = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ matrika, ki pripada preslikavi τ. Potem je*

(1) $\dim(\mathrm{im}(\tau)) = \mathrm{rank}(A)$,
(2) $\dim(\ker(\tau)) + \dim(\mathrm{im}(\tau)) = \dim(V)$.

Izrek 16. *Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava, $\dim V = \dim U = n$ in naj bo A neka matrika, ki pripada τ. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(1) *τ je bijektivna.*
(2) *τ je injektivna.*
(3) *τ je surjektivna.*
(4) *A je obrnljiva.*
(5) $\ker \tau = \{\mathbf{0}\}$.
(6) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.
(7) $\operatorname{im} \tau = U$.
(8) $C(A) = \mathbb{R}^n$.
(9) *Rang matrike A je n.*
(10) *Vrstice matrike A so linearno neodvisne.*
(11) *Vrstice matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.*
(12) *Vrstice matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$.*
(13) *Stolpci matrike A so linearno neodvisni.*
(14) *Stolpci matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.*
(15) *Stolpci matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$.*
(16) $\det A \neq 0$.
(17) *Homogeni sistem enačb $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev.*
(18) *Sistem enačb $Ax = b$ ima rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.*

9. Nadaljnje branje

↯ (1) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006, Podpoglavja 6.1, 6.2, 6.4-6.7.
↯ (2) Tomaž Košir, Linearna algebra, poglavje VI: Vektorski prostori in poglavje VII: Linearne preslikave.

10. Domača naloga

↯ (1) Rešite kviz na Učilnici.
↯ (2) Drži ali ne drži?
- (a) Množica vseh zgornje trikotnih $n \times n$ matrik vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- (b) Množica vseh 3×3 matrik z vsemi diagonalnimi elementi enakimi 0 je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
- (c) Množica vseh 4×4 matrik, ki imajo vse vrstice enake, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{4\times 4}$.
- (d) Ravnina v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $x + 2y + 3z = 4$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
- (e) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.

(f) Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ baza prostora V.
(g) Vsaka linearno neodvisna množica vektorjev v vektorskem prostoru dimenzije 9 vsebuje vsaj 9 elementov.
(h) Vsaka baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 4}$ ima največ 4 elemente.
(i) Če je U linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_k$, potem vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tvorijo bazo prostora U.

ϟ (3) Katere od naslednjih množic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^n$? Za vsak podprostor določite tudi bazo.
(a) Vsi vektorji dolžine 1.
(b) Vsi vektorji, ki so pravokotni na vektor $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
(c) Vsi vektorji, ki niso kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
(d) Vsi vektorji, ki so kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
(e) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je neničelna.
(f) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je ničelna.

ϟ (4) Katere od naslednjih množic realnih $n \times n$ matrik so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^{n\times n}$? Za vsak podprostor določite tudi bazo.
(a) Matrike, ki imajo prvo vrstico ničelno.
(b) Matrike, ki imajo vsoto elementov v vsaki vrstici enako 1.
(c) Vse matrike C, za katere velja $C^2 = I$.
(d) Vse matrike D, ki so rešitve sistema $Dx = 0$.
(e) Vse matrike, katerih elementi so nenegativna realna števila.
(f) Vse matrike F, za katere velja $F = F^T$.
(g) Vse matrike G, za katere velja $G = -G^T$.
(h) Vse matrike H, za katere velja $\operatorname{rank} H = n$.
(i) Vse matrike, katerih vse vrstice so med seboj enake.
(j) Vse matrike X, katerih produkt z vnaprej dano matriko J je enak ničelni matriki.

ϟ (5) Naj bo V vektorski prostor ter $U, W \subseteq V$ vektorska prostora v V. Pokažite, da je tudi $U \cap W$ vektorski prodprostor v V.

ϟ (6) Pokažite, da je v vektorskem prostoru ničelni vektor en sam.

ϟ (7) Naj $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ označuje vektorski prostor vseh zveznih funkcij na intervalu $[0, 1]$. Pokažite, da so vektorji

$$f(x) = 1,\ g(x) = \cos(2x),\ h(x) = \cos^2 x,$$

linearno odvisni v $\mathcal{C}[0, 1]$.

ϟϟ (8) Naj bo $\mathcal{V}$ množica vseh simetričnih matrik oblike

$$\begin{bmatrix} A & S \\ -S & A \end{bmatrix},$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika ($A^\mathsf{T} = A$), $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pa poševno simetrična ($S^\mathsf{T} = -S$).
(a) Pokažite so, da je $\mathcal{V}$ vektorski prostor.
(b) Poiščite bazo prostora $\mathcal{V}$ in določite $\dim \mathcal{V}$.

(c) Dokažite, da je karakteristični polinom vsake matrike v $\mathcal{V}$ kvadrat.

↯ (9) Dokažite izreke 7, 8, 9, 13 in 14.

↯(10) Naj bosta $u, v \in V$ linearno neodvisna lastna vektorja linearne preslikave $\tau\colon V \to V$. Če je $u + v$ tudi lastni vektor za τ, potem pokažite, da u in v pripadata isti lastni vrednosti.

↯(11) Dokažite, da nobena linearna preslikava $\tau : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}_4[x]$ ni injektivna.

↯(12) Definirajmo preslikavo $\tau : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ s predpisom $\tau(A) = \operatorname{tr}(A)$.
- (a.) Pokažite, da je τ linearna.
- (b.) Zapišite matriko, ki pripada τ v standardnih bazah $\mathbb{R}^{3\times 3}$ in $\mathbb{R}$.
- (c.) Določite $\ker \tau$ in $\operatorname{im} \tau$.

↯(13) Definirajmo preslikavo $\tau : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ s predpisom $\tau(p(x)) = x^2 p'(x)$.
- (a) Pokažite, da je τ linearna.
- (b) Zapišite matriko, ki ustreza preslikavi τ v standardnih bazah $\mathbb{R}_1[x]$ in $\mathbb{R}_2[x]$.
- (c) Določite $\ker \tau$ in $\operatorname{im} \tau$.

↯(14) Aleksandra Franc, Rešene naloge iz linearne algebre, naloge poglavja 5.

↯(15) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006,
- (a) stran 446 (Exercises 24-50),
- (b) 460-463 (Exercises 1-58).
- (c) strani 484-485, naloge 1-36,
- (d) strani 499-500, naloge 1-20,
- (e) strani 516-518, naloge 1-44,
- (f) strani 536-537, review questions 1-20.

(Naloge, označene s ↯ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloga, označena s ↯↯ je nekolika težja.)