Matematika 1	**Izročki: 4. teden**

Pozitivno semidefinitne matrike. Razcep Choleskega.

Polona Oblak

1. Pozitivno semidefinitne matrike

Spomnimo se, da ima simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vse lastne vrednosti realne.

Simetrični matriki $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pravimo

(1) *pozitivno semidefinitna*, če je $x^\mathsf{T} A x \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$.
(2) *pozitivno definitna*, če je $x^\mathsf{T} A x > 0$ za vse neničelne $x \in \mathbb{R}^n$.
(3) *negativno semidefinitna*, če je $x^\mathsf{T} A x \leq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$.
(4) *negativno definitna*, če je $x^\mathsf{T} A x < 0$ za vse neničelne $x \in \mathbb{R}^n$.
(5) *nedefinitna*, če je $x^\mathsf{T} A x > 0$ za nekatere $x \in \mathbb{R}^n$ in $y^\mathsf{T} A y < 0$ za nekatere $y \in \mathbb{R}^n$.

Izrek 1. *Simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je*

(1) *pozitivno semidefinitna natanko tedaj, ko ima vse lastne vrednosti nenegativne,*
(2) *pozitivno definitna natanko tedaj, ko ima vse lastne vrednosti pozitivne,*
(3) *negativno semidefinitna natanko tedaj, ko ima vse lastne vrednosti nepozitivne,*
(4) *negativno definitna natanko tedaj, ko ima vse lastne vrednosti negativne,*
(5) *nedefinitna natanko tedaj, ko ima tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.*

Izrek 2. (1) *Simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\operatorname{rank}(A) = r$, je pozitivno semidefinitna natanko tedaj, ko obstaja takšna matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\operatorname{rank}(B) = r$, da je $A = BB^\mathsf{T}$.*
(2) *Simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivno definitna natanko tedaj, ko obstaja takšna obrnljiva matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je $A = BB^\mathsf{T}$.*

Izrek 3 (Sylvester)**.** *Simetrična matrika A je pozitivno definitna natanko tedaj, ko so determinante vseh vodilnih glavnih podmatrik matrike A pozitivne.*

Simetrična matrika A je negativno definitna natanko tedaj, ko je determinanta vsake $k \times k$ vodilne glavne podmatrike A pozitivna, če je k sodo število, ter negativna, če je k liho število.

Izrek 4 (Razcep Choleskega)**.** *Obrnljiva matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ima razcep Choleskega*

$$A = LL^\mathsf{T},$$

kjer je $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spodnje trikotna matrika, natanko tedaj, ko je A simetrična in pozitivno definitna.

2. Nadaljnje branje

ϟ (1) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, Poglavje 14.

ϟ (2) Gilbert Strang, *Linear algebra and Learning from Data*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 2019, razdelek I.7.

⋆ (3) Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 2006, Podpoglavja 7.0, 7.1, 7.2.

⋆ (4) Giorgio Giorgi: Various Proofs of the Sylvester Criterion for Quadratic Forms, Journal of Mathematics Research; Vol 9, No 6, 2017.

3. Domača naloga

ϟ (1) Rešite kviz na spletni Učilnici.

ϟ (2) Poiščite linearno spremembo spremenljivk $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$ and $w = h(x, y, z)$, v kateri ima

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - 4xz - 2yz$$

diagonalno obliko.

ϟ (3) Če sta matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ simetrični pozitivno semidefinitni matriki, pokažite, da je tudi $A \otimes B$ pozitivno semidefinitna matrika.

ϟ (4) Če je simetrična matrika A pozitivno semidefinitna, pokažite, da je tudi A^k pozitivno semidefinitna za vsak $k \in \mathbb{N}$.

ϟ (5) Naj bo $A = B^{\mathsf{T}}B$ takšna pozitivno semidefinitna matrika velikosti $n \times n$, da za nek vektor $x \in \mathbb{R}^n$ velja $x^{\mathsf{T}}Ax = 0$. Pokažite, da je $Bx = 0$ in nato sklepajte, da velja tudi $Ax = 0$.

ϟ (6) Pokažite, da je bločna matrika $\begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathsf{T}} & C \end{bmatrix}$ (simetrična) pozitivno semidefinitna natanko tedaj, ko je matrika $\begin{bmatrix} A & -B \\ -B^{\mathsf{T}} & C \end{bmatrix}$ pozitivno semidefinitna. Pri tem je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ter $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

ϟ (7) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno semidefinitna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.
   (a) Dokažite, da velja $\vec{x}^{\mathsf{T}}A\vec{x} \leq \lambda_1||\vec{x}||^2$ za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Dokažite, da velja $\max_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\vec{x}^{\mathsf{T}}A\vec{x}}{\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{x}} = \lambda_1$.
   (c) Dokažite, da je tudi matrika $A - \lambda_n I_n$ pozitivno semidefinitna.

(8) Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrični pozitivno semidefinitni matriki.

- ↯ (a) Pokažite, da obstaja natanko pozitivno semidefinitna matrika K, da velja $K^2 = A$.
- ⋆ (b) Pokažite, da obstaja natanko ena pozitivno semidefinitna matrika K, da velja $K^2 = A$. Pravimo tudi, da je $K = \sqrt{A}$ koren matrike A.
- ↯ (c) Pokažite, da je $\langle A, B\rangle = ||\sqrt{A}\sqrt{B}||_F^2$.

⋆ (9) Preberite in razumite vsaj enega od dokazov Sylvestrovega izreka.

(Naloge, označene s ↯ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloge, označene s ⋆ so težje, širijo vaše znanje in dopolnjujejo odpredavano snov.)