Matematika 1 — **Izročki: Teden 1**

Ponovitev: matrike, sled, rang, lastne vrednosti,...

Polona Oblak

1. Sled

Sled matrike $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oznaka: $\operatorname{tr}(A)$) je vsota vseh njenih diagonalnih elementov

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Lastnosti sledi. Za matrike $A, B, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

(1) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$,
(2) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$,
(3) $\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}) = \operatorname{tr}(A)$,
(4) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$,
(5) $\operatorname{tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$ za vsako obrnljivo matriko P.

2. Rang

Rang matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (oznaka: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rk}(A)$) je

- število pivotov, ki jih dobimo v (reducirani) vrstično stopničasti obliki matrike A po Gaussovi eliminaciji
- število linearno neodvisnih vrstic matrike A,
- dimenzija linearne ogrinjače vrstic matrike A,
- število linearno neodvisnih stolpcev matrike A,
- dimenzija linearne ogrinjače stolpcev matrike A,
- $\dim C(A)$,
- $n - \dim N(A)$,
- velikost največje obrnljive (kvadratne) podmatrike matrike A.

3. Podobnost

Matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sta *podobni*, če obstaja takšna obrnljiva matrika $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je

$$A = PBP^{-1}.$$

Podobne matrike imajo isto:

(1) sled,
(2) determinanto,

(3) karakteristični polinom,
(4) lastne vrednosti,
(5) rang.

4. Do naslednjega tedna

(1) Rešite kviz in preverite vaše znanje osnovnih pojmov linearne algebre.
(2) Ponovite osnovne lastnosti ranga matrike.
(3) Ponovite razcep singularnih vrednosti (SVD) matrike. Če želite, si lahko pomagate s kakšnim od virov:
   (a) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 6.5.
   (b) spletna Učilnica predmeta Linearna algebra, 2020/21, teden 17.-23. maj
   (c) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 6.7.
   (d) Gilbert Strang: Singular Value Decomposition (the SVD),
   (e) Gilbert Strang, Lecture 29: Singular value decomposition,
   (f) Jure Leskovec: Lecture 46 - Dimensionality Reduction - Introduction.
   (g) Jure Leskovec: Lecture 47 - Singular Value Decomposition.
   (h) Jure Leskovec: Lecture 48 - Dimensionality Reduction with SVD.
   (i) Za geometrijsko predstavo se igrajte z demonstracijo SVD, Mathematica Demonstration.

5. Nadaljnje branje

(1) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, razdelek 5.
(2) 3Blue1Brown, Essence of linear algebra

6. (Priporočljiva) domača naloga

(1) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, stran 53 (Exercise 1, 2, 3).
(2) Dokažite, da je podobnost matrik tranzitivna lastnost.
(3) Dokažite, da imajo podobne matrike isti karakteristični polinom.
(4) Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}^n$ poljubna vektorja in definirajmo $A = xy^T$.
   (a) Pokažite, da je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika s sledjo $x^T y$.

(b) Pokažite, da ima A lastni vrednosti 0 (z večkratnostjo $n-1$) in $x^T y$ (z večkratnostjo 1).

(5) Naj bo $[A|B] \in \mathbb{R}^{m\times(n+p)}$ razširjena matrika z blokoma $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Pokažite, da velja:

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}([A|B]) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$