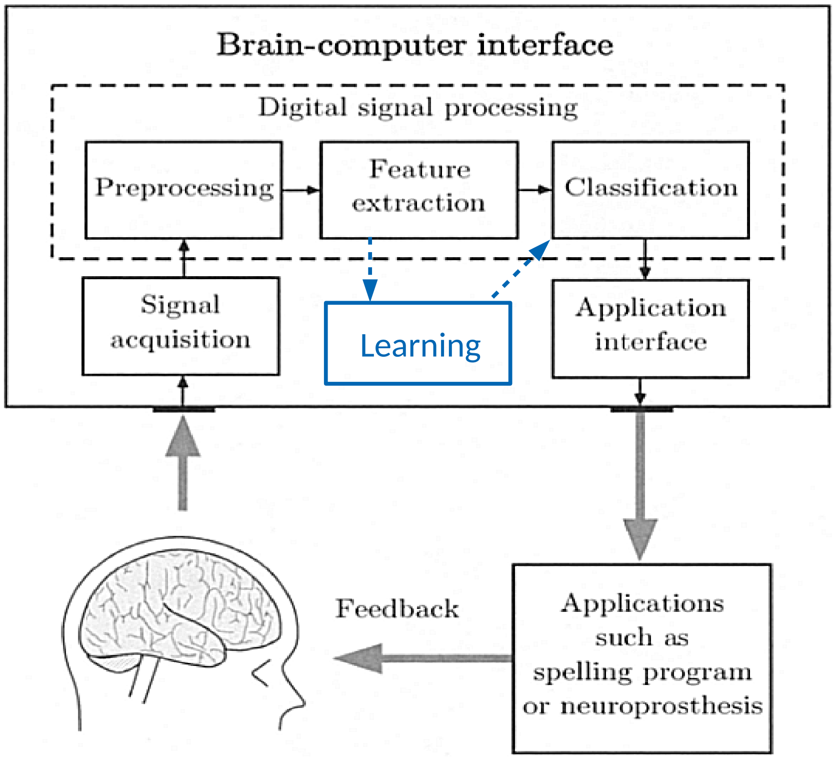
SPEKTRALNA ANALIZA IN PARAMETRIČNO MODELIRANJE

- Faze procesiranja signalov EEG med interakcijo možgani računalnik
- Izločanje značilk v frekvenčnem prostoru
- Primer diskretnega spektra
- Močnostni spekter
- Izločanje značilk v frekvenčnem prostoru
- Značilke v frekvenčnem prostoru
- Tipične arhitekture VMR
- Diskretna Fourierjeva transformacija (DFT)
- Časovno diskretna Fourierjeva transformacija (ČDFT)
- Določanje odziva LČN sistema v frekvenčni domeni
- Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

Faze procesiranja signalov EEG med interakcijo možgani računalnik

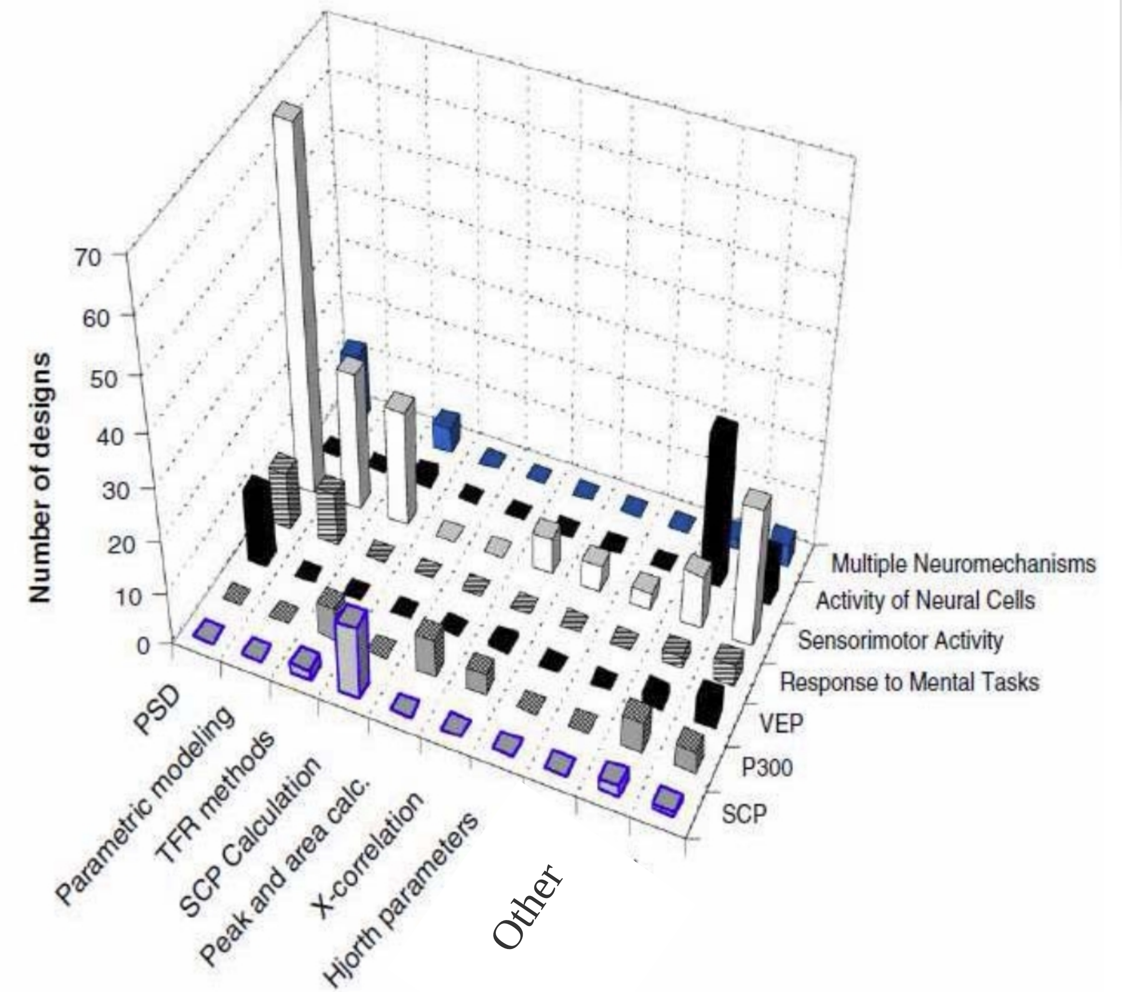
- Zajemanje signalov: EEG signali so dobljeni z možganov z uporabo invazivnih ali neinvazivnih metod (preko elektrod), signali so ojačeni in vzorčeni
- Predobdelava: čiščenje signalov (še posebno artefakti vsled utripanja oči) in filtriranje signalov
- Izločanje značilk: prostorske, časovne, časovno prostorske značilke in **značilke za ocenjevanje močnostnih spektrov**
- Klasifikacija: signali se procesirajo in klasificirajo z namenom ugotovitve katero vrsto mentalne naloge je subjekt opravljal
- Interakcija z računalnikom (vmesnik aplikacije, aplikacija): algoritem uporablja klasificirane signale za upravljanje določene aplikacije



(Sornmo, Laguna)

Izločanje značilk v frekvenčnem prostoru

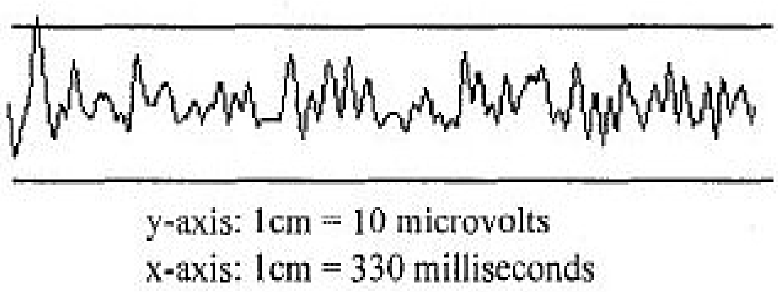
- Tehnike izločanja značilk
  - **Na osnovi spektra ali močnostnega spektra**
    (PSD - power-spectral density)
  - Parametrično modeliranje
    (Parametric modeling)
  - Časovno frekvenčne predstavitve
    (TFR - Time-frequency) representation)
  - SCP – Slow cortical potentials
  - Peak and area calculation
  - Križna korelacija
    X-correlation
  - **Hjorth-ovi parametri**
    (Hjorth parameters)
  - Drugo



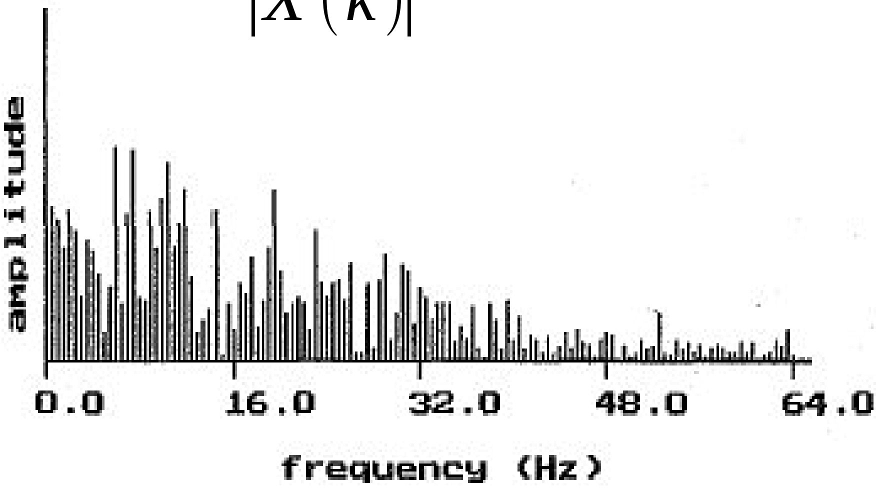
Primer diskretnega spektra

- Časovni signal, *x(n)*, in njegov spekter, |*X(k)*|, v frekvenčnem prostoru

$x(n)$



$|X(k)|$



Močnostni spekter

- Ocenjeni močnostni spekter signala $x(n)$

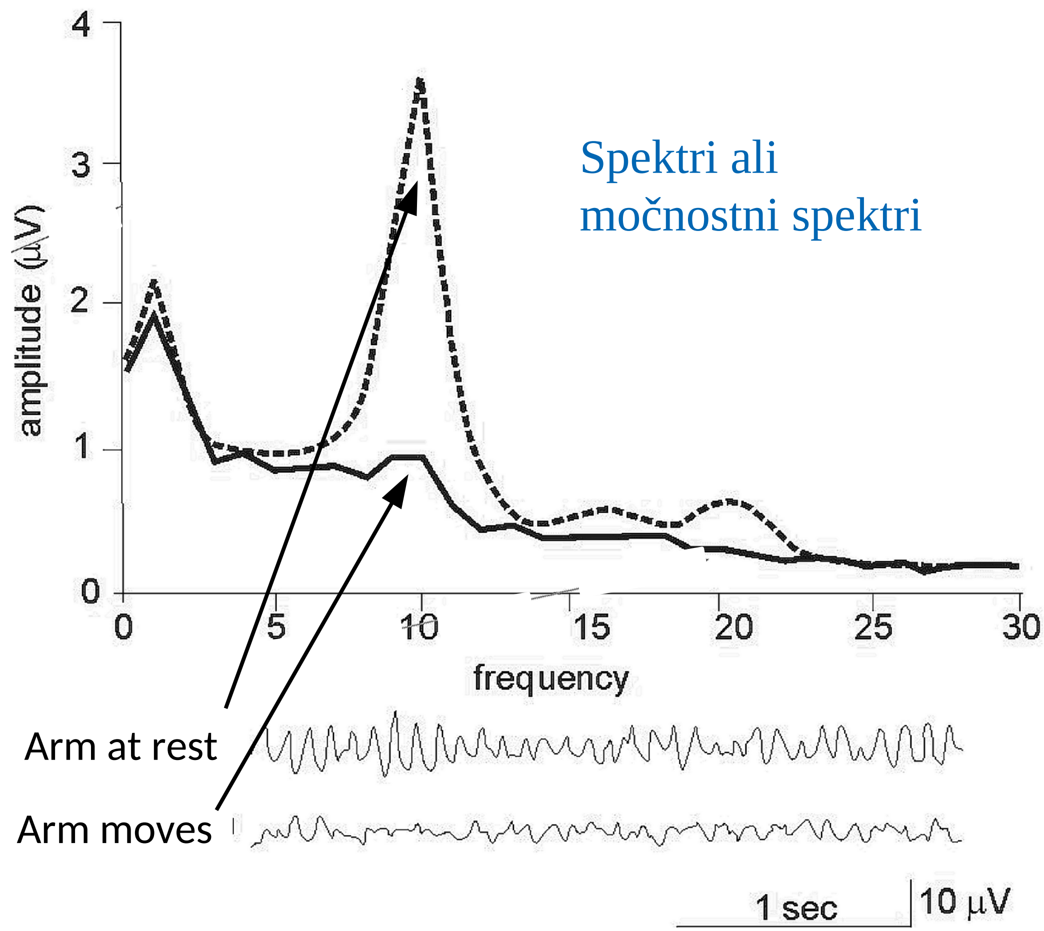
$$P(k) = |X(k)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}\right) n} \right|^2$$

Izločanje značilk v frekvenčnem prostoru

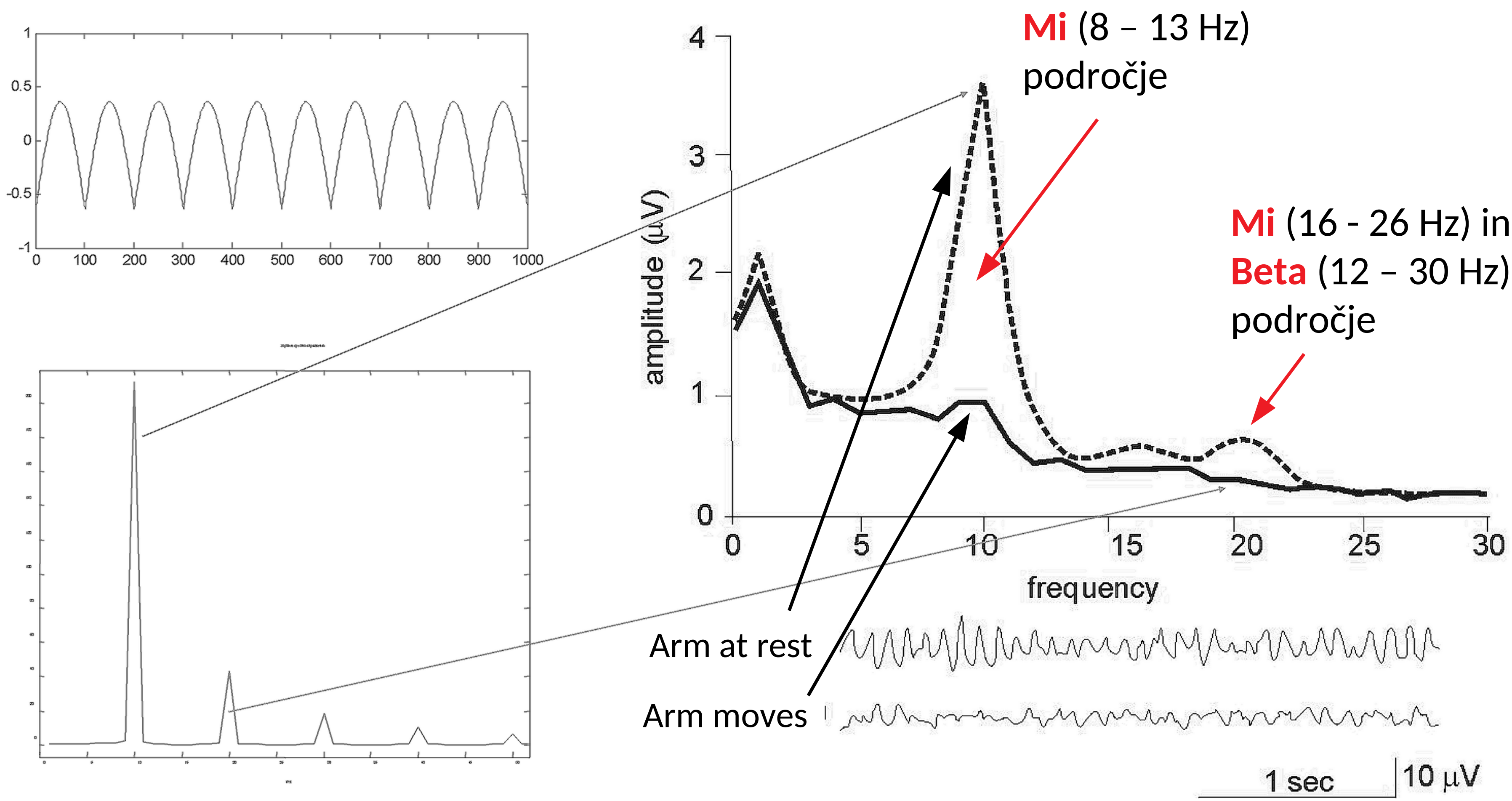
- Tipične značilke (amplitude vrhov spektrov ali močnostnih spektrov signalov v **Mi** frekvenčnem področju, 8 – 13 Hz)

- Zamišljanje premika leve roke
  → premakni kurzor v levo

- Zamišljanje premika desne roke
  → premakni kurzor v desno



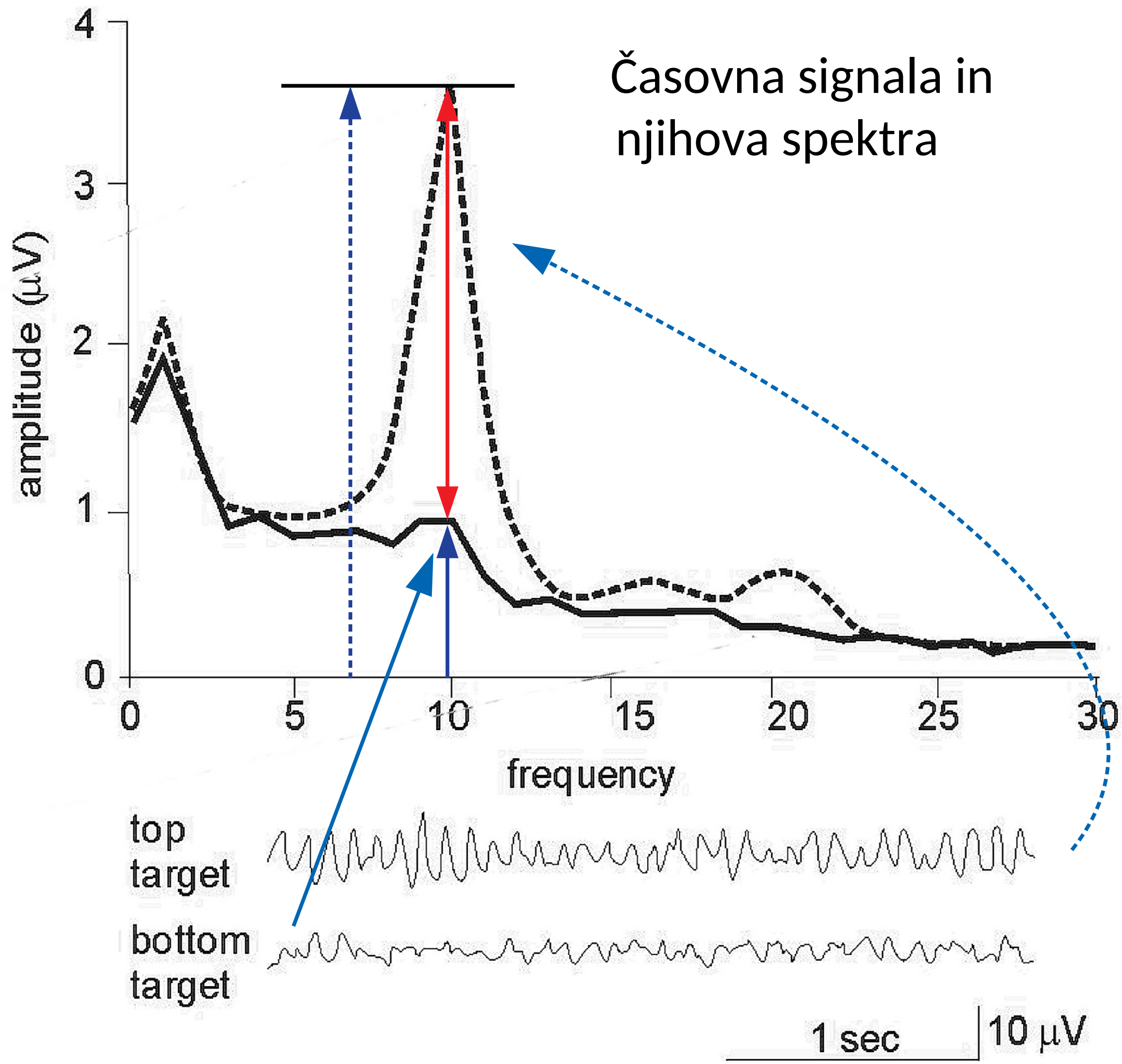
Izločanje značilk v frekvenčnem prostoru



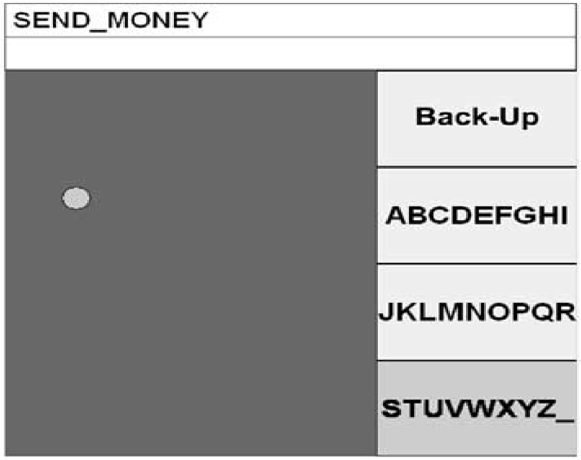
Značilke v frekvenčnem prostoru

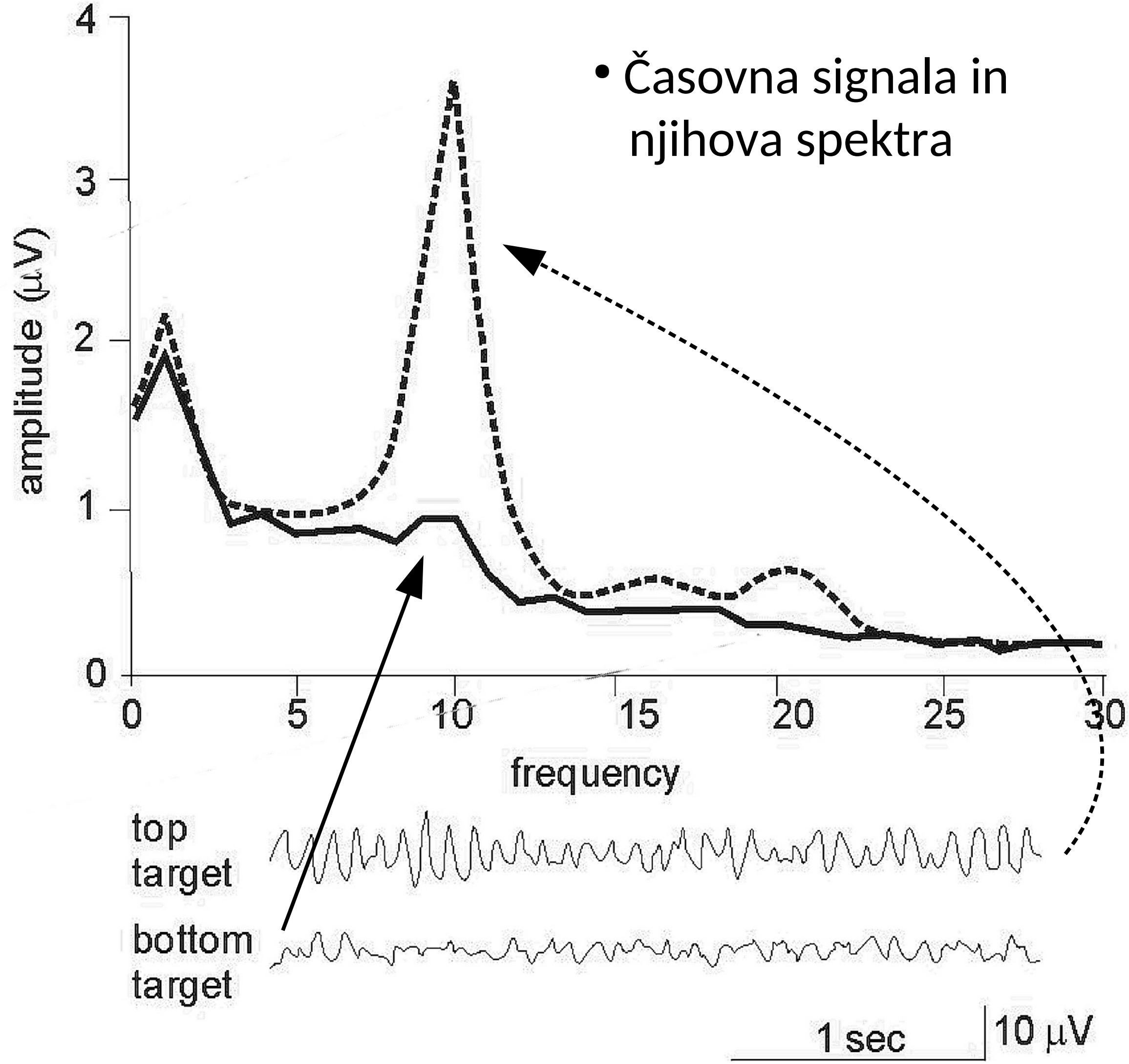
- Značilke so amplitude spektrov ali močnostnih spektrov v danem frekvenčnem področju, (npr. 8-13 Hz, μ ritem), ali razlike amplitud v danem frekvenčnem področju

Časovna signala in njihova spektra



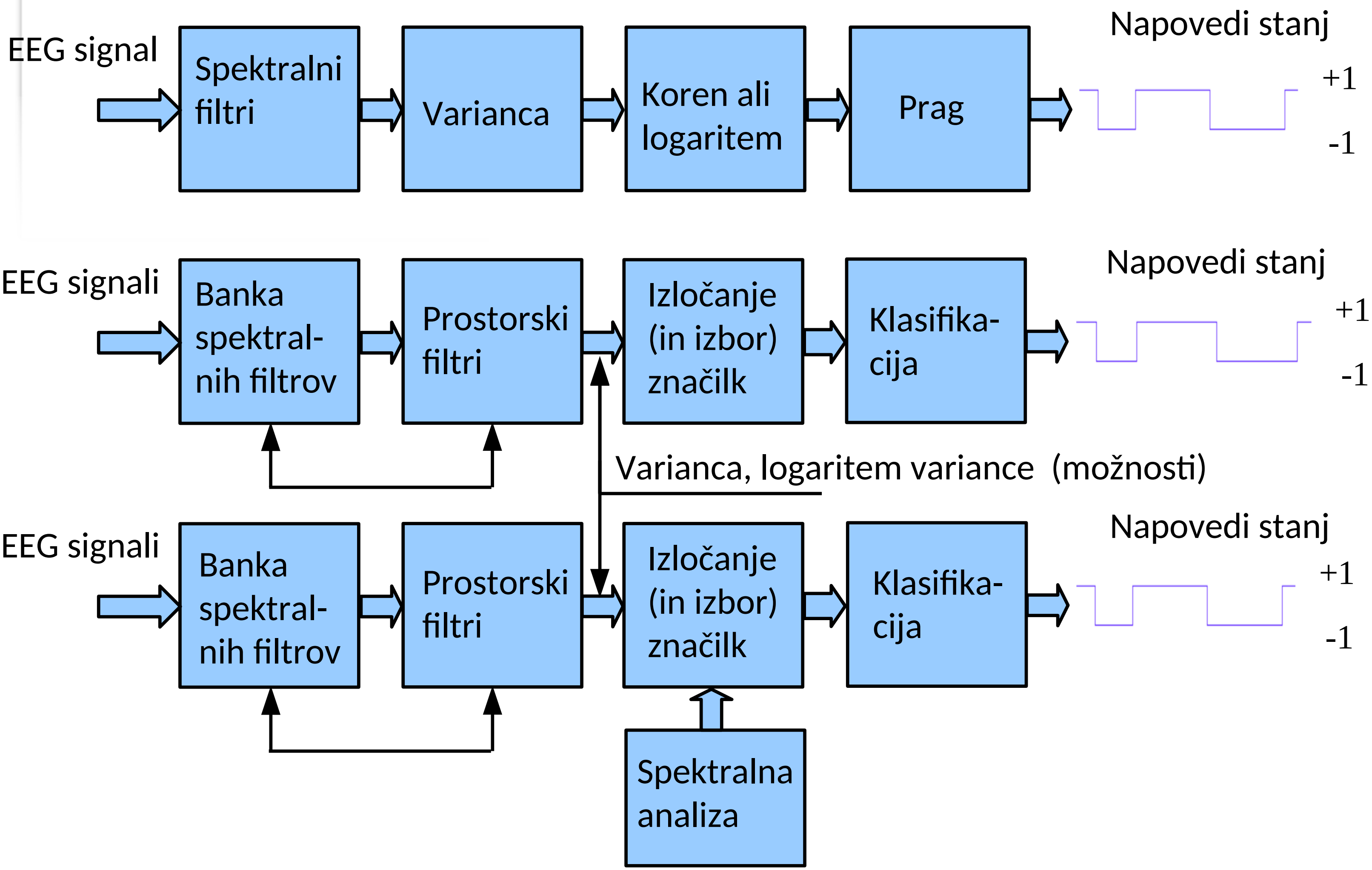
Značilke v frekvenčnem prostoru





- Časovna signala in njihova spektra

Tipične arhitekture VMR



Diskretna Fourierjeva Transformacija (DFT)

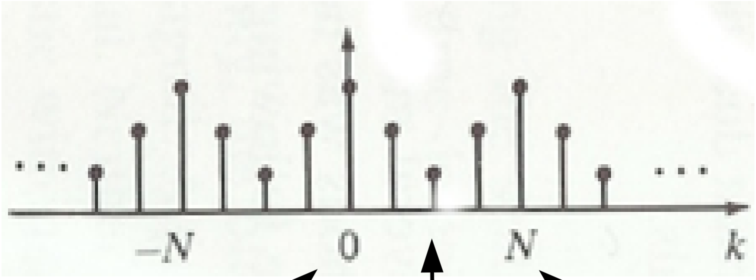
- DFT razdeli (vzorči) interval 0 .. *Fs* na *N* enakih intervalov za izračun *X(k)*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j(\frac{2\pi k}{N}).n} \qquad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x(n)\cos(\frac{2\pi k}{N}n) - j\,x(n)\sin(\frac{2\pi k}{N}n)\right)$$

$$|X(k)| \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

→ končna, diskretna in periodična s periodo *N*

Primer, *N* = 4



0   *Fs/2*   *Fs*

- *Fs* – Frekvenca vzorčenja
- |*X(k)*| – *N* vzorcev frekvenčnega spektra, *k* = 0,1,2, ..., *N-1*
- *ΔF* = *Fs* / *N* – Interval med dvema vzorcema v frekvenčnem spektru [*Hz*]
- *Fk* = *k* . *ΔF* – Frekvenca *k*-tega vzorca v frekvenčnem spektru [*Hz*]

Časovno diskretna Fourierjeva transformacija (ČDFT)

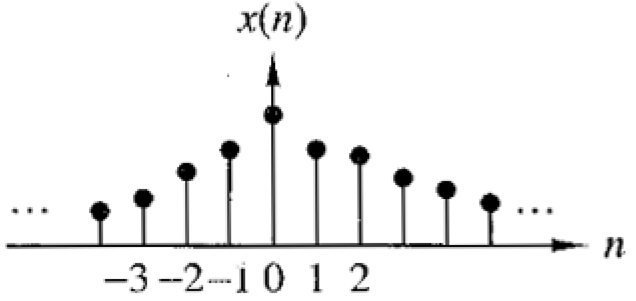
- **Časovno diskretna Fourierjeva transformacija (ČDFT, DTFT) signala *x(n)***

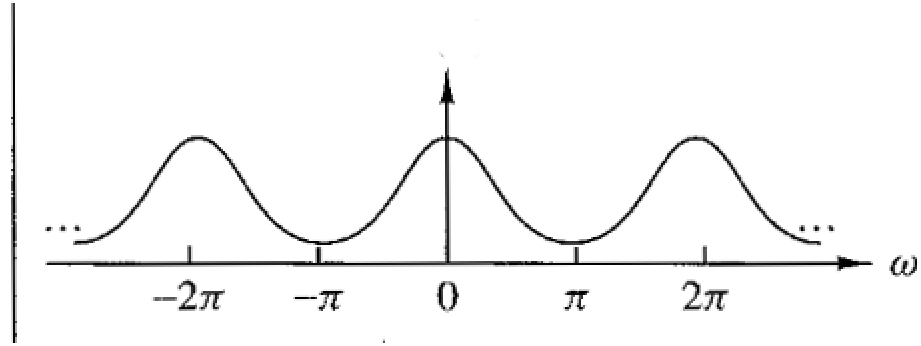
$$\text{DČFT:} \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} \qquad e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j\sin(\omega)$$

$$\text{DFT:} \quad X(k) \equiv X(e^{j\omega})\Big|_{\omega_k = \frac{2\pi k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right).n} \qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$

Argument je $e^{j\omega}$ $\rightarrow$ spekter je zvezen in periodičen s periodo 2π

$$-\pi < \omega < \pi$$





Določanje izhoda LČN sistema v frekvenčni domeni

- **Relacija za določanje izhoda LČN sistema v frekvenčni domeni z uporabo DFT**

→ Konvolucija v časovni domeni postane množenje v frekvenčni domeni

$$X(k) \longrightarrow \boxed{H(k)} \longrightarrow Y(k)$$

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] \qquad Y(k) = \mathrm{DFT}[y(n)]$$

$$H(k) = \mathrm{DFT}[h(n)]$$

Frekvenčni odziv filtra $\longrightarrow$ $H(k) = \dfrac{Y(k)}{X(k)}$

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(k) \,.\, X_2(k)$$

Spekter izhodnega signala

$$Y(k) = H(k) \,.\, X(k)$$

Izhodni signal

$$y(n) = \mathrm{IDFT}[\, Y(k) \,]$$

- **Relacija za določanje izhoda LČN sistema v frekvenčni domeni z uporabo ČDFT**

→ Konvolucija v časovni domeni postane množenje v frekvenčni domeni

$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x(n)] \qquad Y(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[y(n)]$$

$$H(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[h(n)]$$

Frekvenčni odziv filtra $\longrightarrow$ $H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \,.\, X_2(e^{j\omega})$$

Spekter izhodnega signala

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \,.\, X(e^{j\omega})$$

Izhodni signal

$$y(n) = \mathrm{IDTFT}[\, Y(e^{j\omega}) \,]$$

Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

- **Ocenjevanje močnostnega spektra signala *x(n)* s parametričnim modeliranjem**
  - Avtoregresivno (AR) modeliranje za izračun močnostnega spektra signala je alternativa metodam, ki temeljijo na Fourier-jevi transformaciji
  - Parametrično modeliranje omogoča karakterizacijo močnostnih spektrov EEG signalov in njihove dinamike
  - Modeliranje je zmožno razlikovanja med različnimi mentalnimi stanji in zagotavlja kompakten opis različnih EEG ritmov: delta, theta, alfa, mi, beta in gama

Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

- Ključni spektralni filtri (LDEKK enačba vsebuje samo nerekurzivni člen, $a_k = 0$ (k = 1, 2, 3, ... , K))

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m \, x(n-m) + \cancel{\sum_{k=1}^{K} a_k \, y(n-k)}$$

- Spektralni filtri:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m \, x(n-m) + \sum_{k=1}^{K} a_k \, y(n-k)$$

- Avtoregresivni filtri:

$$y(n) = b_0 \, x(n) + \sum_{k=1}^{K} a_k \, y(n-k)$$

$$x(n) \Leftrightarrow y(n) \Rightarrow \quad x(n) = \sum_{k=1}^{K} a_k \, x(n-k) + b_0 \, y(n)$$

Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

- **Ocenjevanje močnostnega spektra s parametričnim modeliranjem**
  - AR metoda za oceno močnostnega spektra signala *x(n)* predpostavlja, da je signal *x(n)* izhod nekega linearnega rekurzivnega (IIR) filtra, ko na njegov vhod pripeljemo signal *v(n)*, ki je beli šum z varianco σ^2 in ravnim močnostnim spektrom (*p* je red filtra oziroma red modela).

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-1) - \ldots - a_p x(n-p) + v(n)$$

  - Ta filter je določen s svojim amplitudnim odzivom $|H(e^{j\omega})|$ in koeficienti a_i
  - Kvadrat amplitudnega odziva tega filtra predstavlja močnostni spekter signala *x(n)*
  - Koeficienti $a_1, a_2, \ldots, a_p$ in σ^2 (parametri modela) določajo močnostni spekter signala *x(n)*

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_v}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}} \qquad |H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\sigma_v^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}\right|^2}$$

Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

- AR modeliranje, to je, modeliranje parametrov (koeficientov) IIR filtra, predpostavlja, da je bil modelirani signal *x(n)* generiran kot rezultat pošiljanja belega šuma *v(n)* z varianco σ^2_v in ravnim močnostnim spektrom skozi ta IIR filter. Ta linearni IIR filter ima frekvenčni odziv *H(.)*. Opisan je z množico parametrov (koeficientov) in spektralno preoblikuje beli šum tako, da ta doseže ujemanje (približek) s spektrom modeliranega signala *x(n)*. Struktura IIR filtra točno modelira spekter signala *x(n)* z ostrimi in ločljivimi vrhovi.

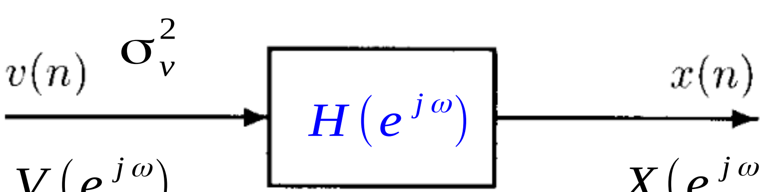
$X(e^{j\omega})$ $x(n)$ $H(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$ $y(n)$ $\longrightarrow$ $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \,.\, X(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Frekvenčni odziv filtra

$y(n) \rightarrow x(n)$ $\quad$ $x(n) \rightarrow v(n)$

$Y(e^{j\omega}) \rightarrow X(e^{j\omega})$ $\quad$ $X(e^{j\omega}) \rightarrow V(e^{j\omega})$



$\longrightarrow$ $X(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \,.\, V(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{V(e^{j\omega})}$$

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - \ldots - a_p x(n-p) + v(n)$$

$$x(n) + a_1 x(n-1) + \ldots + a_p x(n-p) = v(n)$$

$\sigma^2_v = ?$

$a_k = ?$

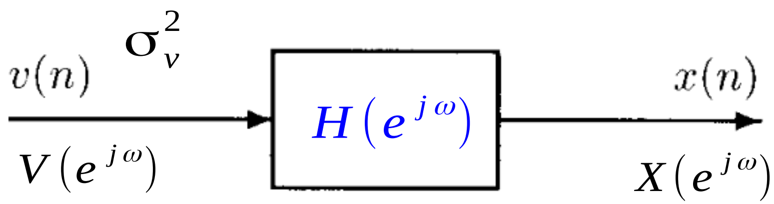
Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

DČFT pari

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x(n-n_0) \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \,.\, X_2(e^{j\omega})$$



$$X(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \,.\, V(e^{j\omega})$$

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - \ldots - a_p x(n-p) + v(n)$$

$$x(n) + a_1 x(n-1) + \ldots + a_p x(n-p) = v(n)$$

DČFT: $X(e^{j\omega}) + a_1 X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \ldots + a_p X(e^{j\omega})e^{-j\omega p} = V(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega})(1 + a_1 e^{-j\omega} + \ldots + a_p e^{-j\omega p}) = V(e^{j\omega})$$

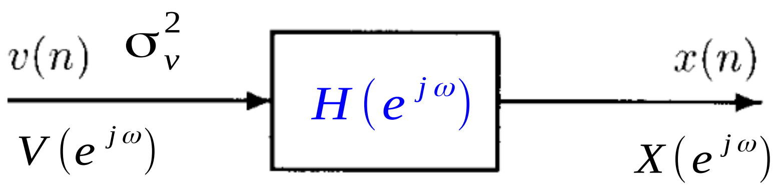
AR model opisan s frekvenčnim odzivom filtra

$$H(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{V(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}}$$

$\sigma_v^2 = ?$ $\quad a_k = ?$

Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

- Frekvenčni odziv AR modela → $H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}}$



→ $X(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) . V(e^{j\omega})$

Močnostni spekter signala *x(n)*

$$|X(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|^2 . |V(e^{j\omega})|^2$$

$$S_v(e^{j\omega}) = |V(e^{j\omega})|^2 = \left|\sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j\omega n}\right|^2 = \sigma_v^2$$

$$S_x(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 S_v(e^{j\omega})$$

$$S_x(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 = \left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}\right|^2 \longrightarrow S_x(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \sigma_v^2$$

$$S_x(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_v^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}\right|^2}$$

→ parametri modela $a_1, \ldots, a_p$ in σ_v^2 določajo ***močnostni spekter*** signala *x(n)*

Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

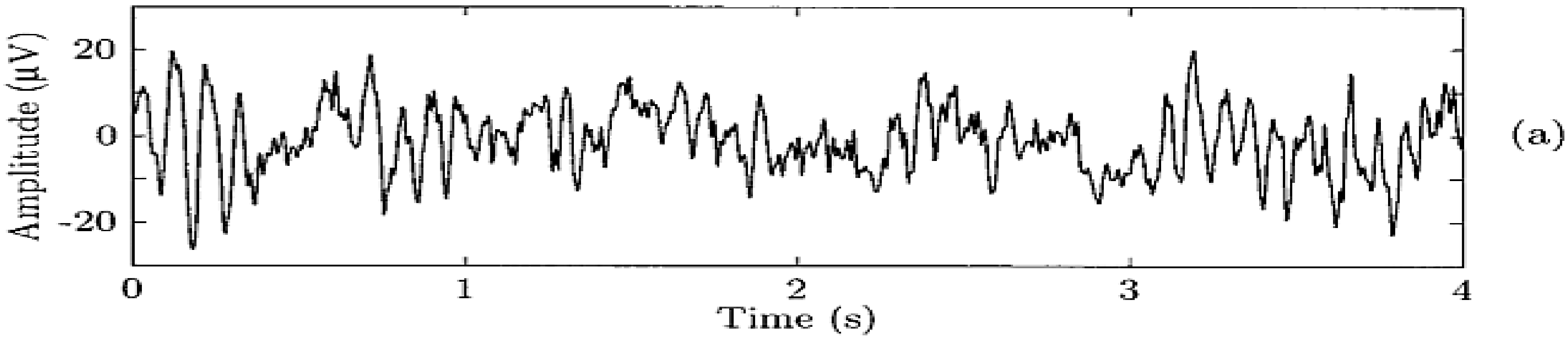
- **Kako oceniti parametre (koeficiente) modela?**
  - *Avtokorelacijske in kovariančne metode za minimizacijo variance napake*
  - ***Burg-ova*** metoda

  → ***(Glej: Sornmo, Laguna)***
- Na osnovi parametrov modela $a1, \ldots, ap$, in $\sigma^2 v$ je možno izračunati močnostni spekter AR modela, oziroma ***močnostni spekter*** signala *x(n)*

- MATLAB:

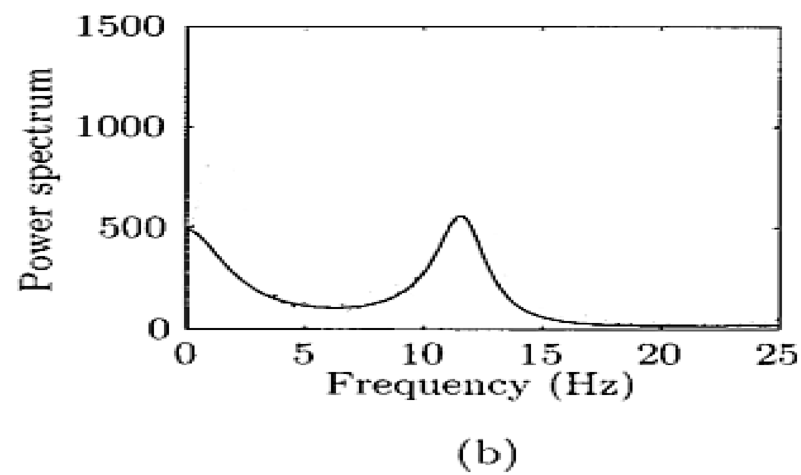
```
> [a, e] = arburg(x, p)      % Vrne AR parametre
                              % x – signal,   p – red modela
                              % a – parametri modela, e – ocenjena varianca
> pxx = pburg(x, order)      % Vrne močnostni spekter
                              % x – signal,  order – red modela
                              % pxx – močnostni spekter
```

Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)



(a) Štiri sekundni EEG signal vzorčen s frekvenco vzorčenja 128 smp/sec

(b) Močnostni spekter kjer je red modela *p = 10*. Parameteri pripadajočega AR močnostnega spektra so bili ocenjeni z Burg-ovo metodo.



(Sornmo, Laguna)

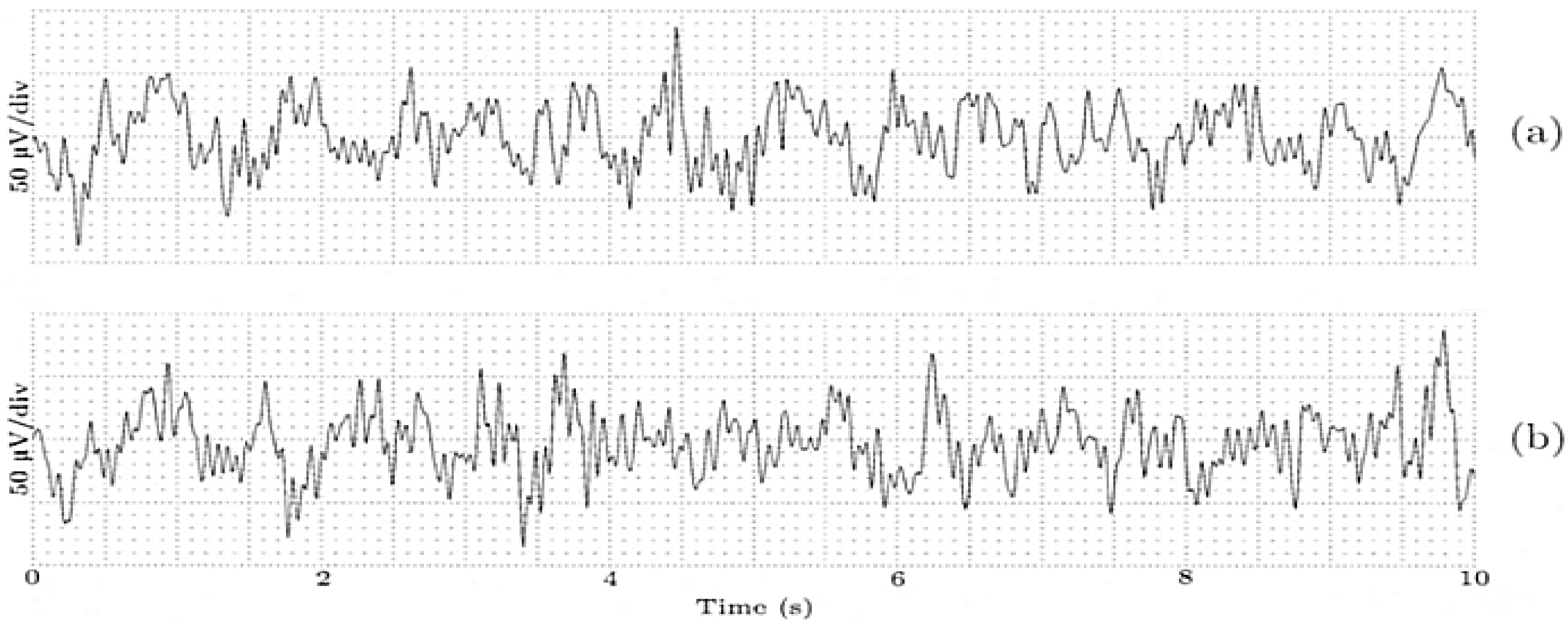
Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

- **Ocenjevanje močnostnega spektra s parametričnim modeliranjem**
  - Parametri AR modela vsebujejo potrebno informacijo ***o spektralni moči in dominantni frekvenci danega EEG ritma***
  - Število vrhov, ki jih je lahko prikazati v AR močnostnem spektru je določeno z redom modela *p*; ***vsak naslednji spektralni vrh zahteva povišanje reda modela za dva***
  - Ker je relevantna informacija o spektru shranjena v ***AR parametrih*** (koeficientih filtra), ***so parametri sami kar značilke za klasifikacijo*** zamišljenih motoričnih aktivnosti
  - Modeliranje zagotavlja generacijo močnostnega spektra ***z višjo spektralno resolucijo*** kot Fourier-jeva analiza, kar je še posebaj pomembno med ***analizo krajših segmentov signalov***
  - ***Krajši segmenti signalov so nujni zaradi zahtevanega tekočega ažuriranja značilk oziroma analize v (navidezno) relanem času***

Parametrično modeliranje (avtoregresivni AR parametri)

(a) EEG signal z izrazitim alfa ritmom

(b) Simulirani signal dobljen z AR modelom katerega parametri so bili ocenjeni preko signala pod (a)



(Sornmo, Laguna)