

PREDOBDELAVA IN IZLOČANJE ČASOVNIH TER PROSTORSKIH ZNAČILK, II

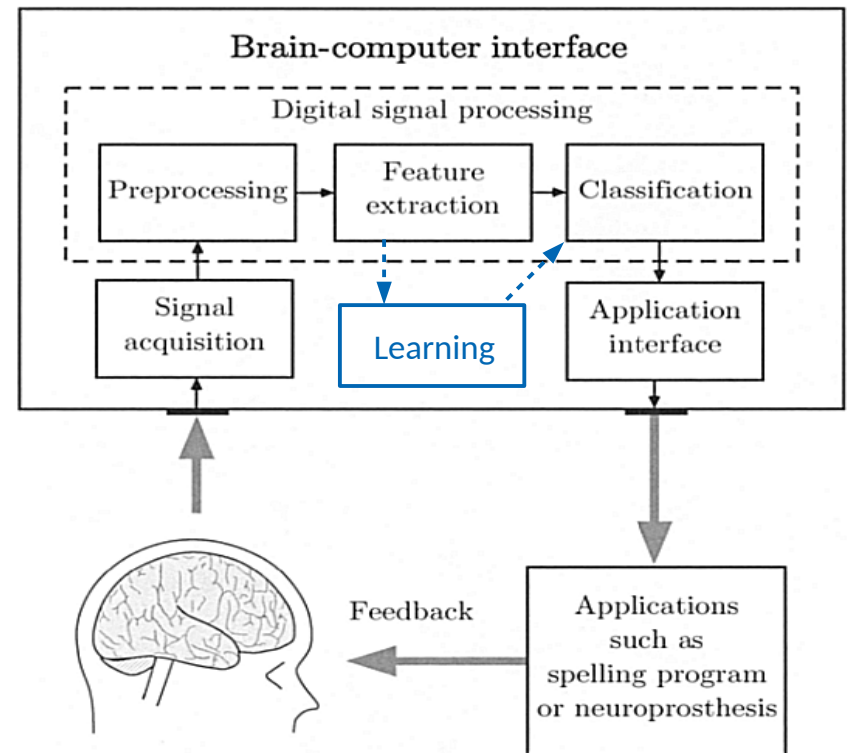
- Faze procesiranja signalov EEG med interakcijo možgani računalnik
- Spekter signala
- Spektralni filtri
- Konvolucija
- Ključni spektralni filtri
- Lastnost konvolucije
- Diskretna Fourierjeva Transformacija (DFT)
- DFT enotnega vzorca
- Amplitudni odziv filtra
- Določanje izhoda LČN sistema v frekvenčni domeni
- Odziv LČN sistema v časovni in frekvenčni domeni
- Načrtovanje spektralnih filtrov

PREDOBDELAVA IN IZLOČANJE ČASOVNIH TER PROSTORSKIH ZNAČILK, II

- Načrtovanje filtrov v MATLAB-u
- Časovne značilke
- Tipične arhitekture VMR
- (Spektralni filtri)
- (DFT in Inverzna Diskretna Fourierjeva Transformacija (IDFT))
- (Spektralni filtri)

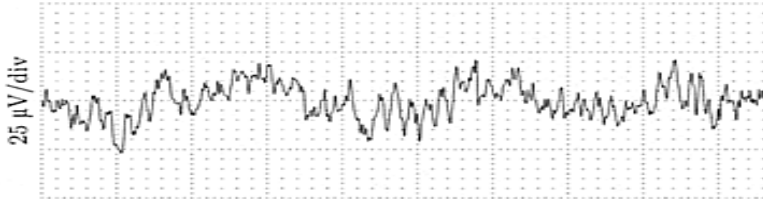
Faze procesiranja signalov EEG med interakcijo možgani računalnik

- **Zajemanje signalov:** EEG signali so dobljeni z možganov z uporabo invazivnih ali neinvazivnih metod (preko elektrod), signali so ojačeni in vzorčeni
- **Predobdelava:** čiščenje signalov (še posebno artefakti vsled utripanja oči) in filtriranje signalov
- **Izločanje značilk:** **prostorske, časovne, časovno prostorske značilke** in značilke za ocenjevanje močnostnih spektrov
- **Klasifikacija:** signali se procesirajo in klasificirajo z namenom ugotovitve katero vrsto mentalne naloge je subjekt opravljal
- **Interakcija z računalnikom** (vmesnik aplikacije, aplikacija): algoritem uporablja klasificirane signale za upravljanje določene aplikacije



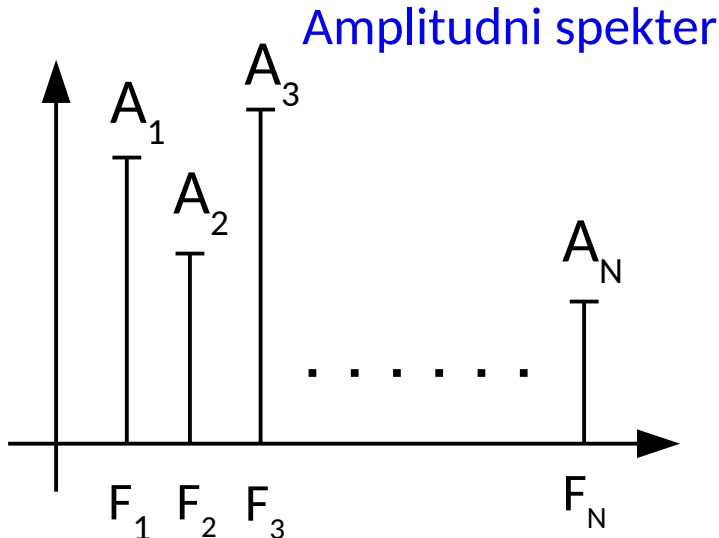
Spekter signala

- Segment signala je lahko predstavljen kot vsota mnogih sinusoid različnih amplitud in frekvenc, ki so med seboj premaknjene:

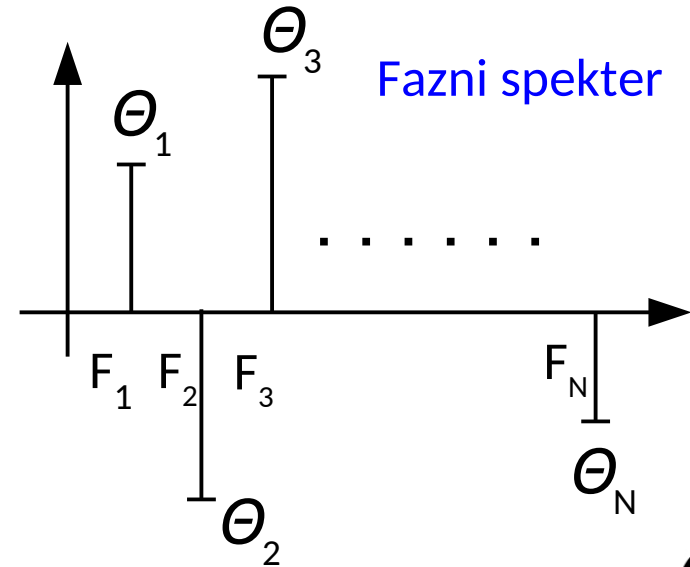


$$x(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(2\pi F_i t + \theta_i)$$

- kjer so $\{A_i\}$, $\{F_i\}$, in $\{\theta_i\}$ množice amplitud, frekvenc in premikov (faz)
- [Kaj je \(frekvenčni\) spekter?](#)



$$\begin{aligned}
 F_2 &= 2 \cdot F_1 \\
 F_3 &= 3 \cdot F_1 \\
 &\vdots \\
 F_N &= N \cdot F_1
 \end{aligned}$$



Spektralni filtri

- **Preprost primer spektralnega filtra**
 - **Tekoče povprečenje**

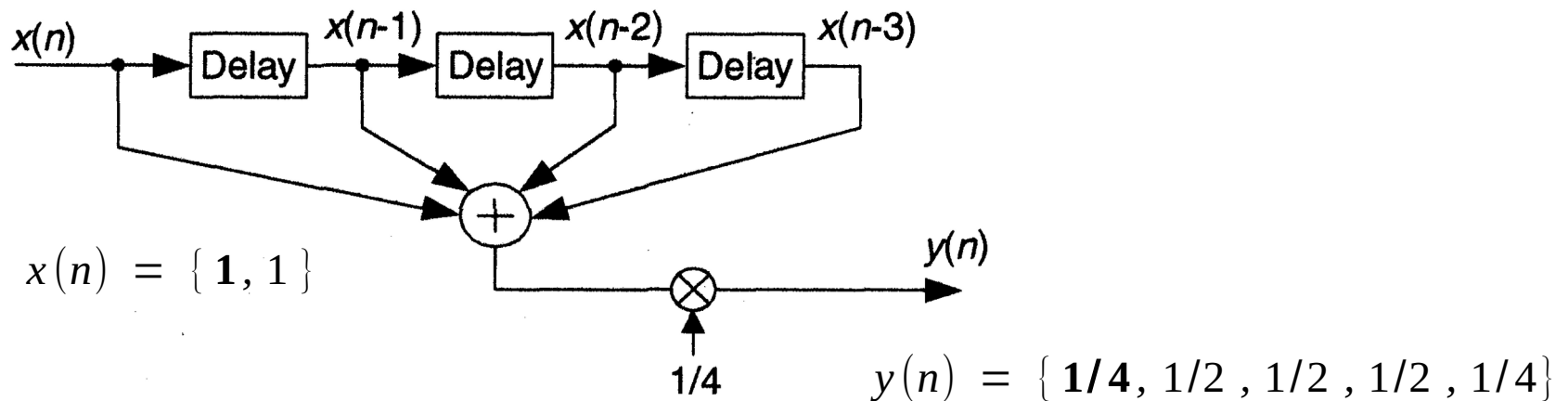
$$T := y_i(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x_i(n-m)$$

- Učinkovito gladi signale (nizko prepustni filter, prepušča nizke frekvence)
- Je tudi detektor envelope



Spektralni filtri

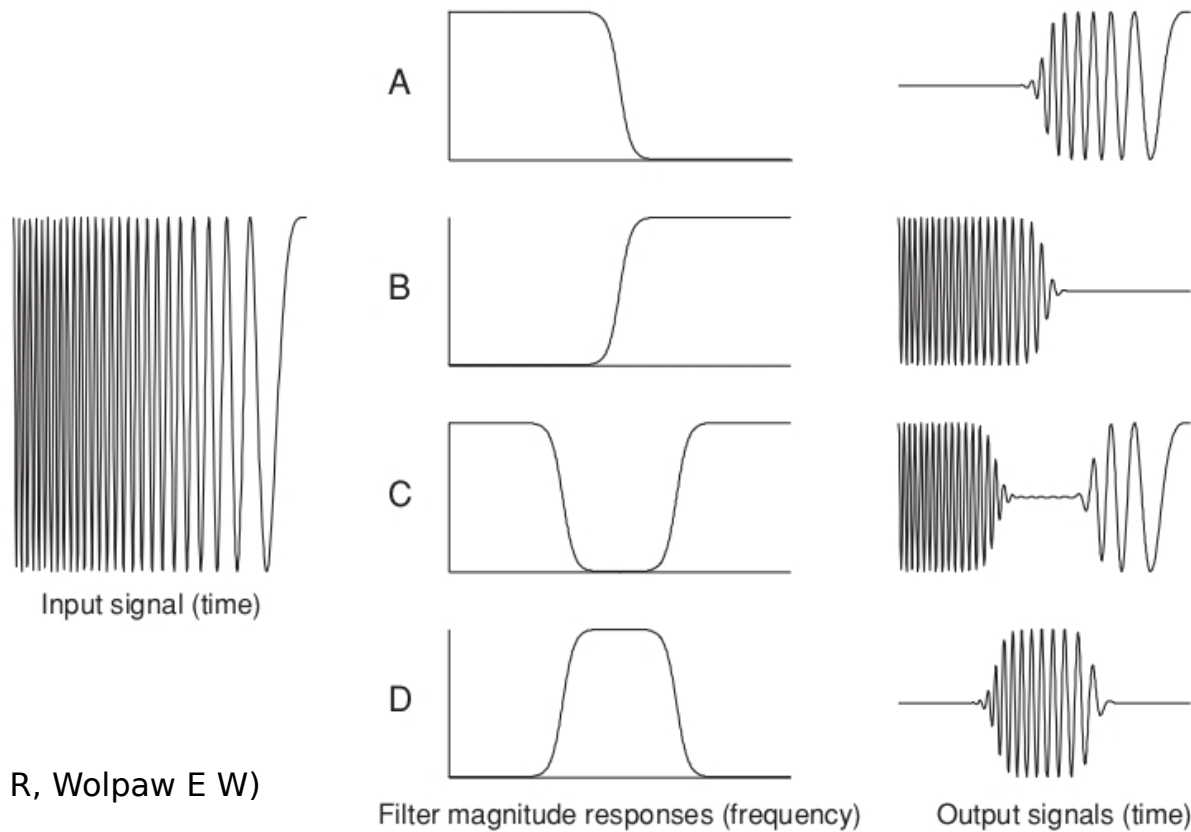
- Primer**
$$y(n) = \frac{1}{4}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)] = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(n-m)$$





Spektralni filtri

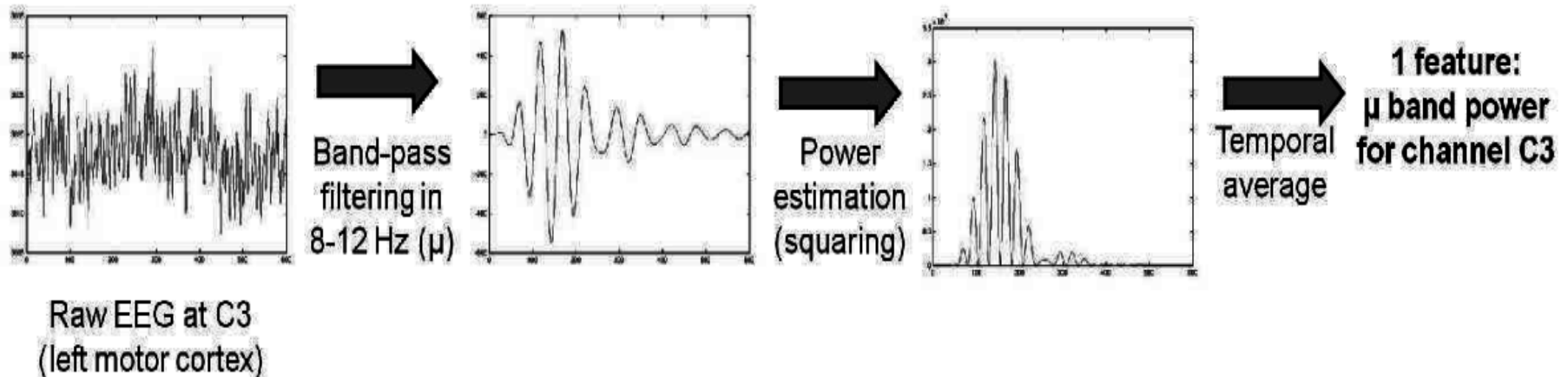
- **Odzivi** nizkega, visokega, pasovno zapornega in pasovno prepustnega filtra



(Wolpaw J R, Wolpaw E W)

Spektralni filtri

- Njihov osnovni namen pri VMR je **izolacija relevantnih možganskih ritmov**
- Tipični filtri so: visokoprepustni, nizkoprepustni in pasovno prepustni



Spektralni filtri

- **Transformirajo večkanalni signal $X(n)$ tako, da je vsak signal $y_i(n)$ v $Y(n)$ odvisen le od signala $x_i(n)$**
- *Konceptualno so ortogonalni na prostorske filtre*
- Digitalni filtri definirani z **Linearno Diferenčno Enačbo s Konstantnimi Koeficienti (LDEKK)** (*linear, constant-coefficient difference equation (LCCDE)*) konstituirajo pomemben razred digitalnih filtrov:

$$y(n) = \sum_{k=1}^K a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

- Lastnosti: linearnost, časovna nespremenljivost, kavzalnost
- Maksimum števil M in K je red filtra
- Filtri so kavzalni, uporabljajo samo trenutne in pretekle (ne prihodnje) vhodne in izhodne vzorce

Spektralni filtri

- **Odziv filtrov LDEKK**, $y(n)$, na poljubni vhodni signal $x(n)$, **je lahko popolnoma karakteriziran** z njegovim odzivom na en poseben vhodni signal, to je, **enotin vzorec**, $\delta(n)$. Odziv $\delta(n)$ označimo s $h(n)$.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} = \{\mathbf{1}\}$$

- Če je $a_k = 0$, je odziv $h(n)$ na enotin vzorec, $\delta(n)$, **končne dolžine** (**KEO filtri**, **FIR filters**, Finite-Impulse Response filters, nerekurzivni filtri)
- Če je $a_k \neq 0$, je odziv $h(n)$ na enotin vzorec, $\delta(n)$, **neskončne dolžine** (**NEO filtri**, **IIR filters**, Infinite-Impulse Response filters, rekurzivni filtri)

$$y(n) = \sum_{k=1}^K a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

Spektralni filtri

- **Ključni spektralni filtri** → filtri s Končnim Enotnim Odzivom (KEO, FIR)
LDEKK enačba vsebuje samo **nerekurzivni člen**, $a_k = 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots, K$)

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) + \cancel{\sum_{k=1}^K a_k y(n-k)}$$

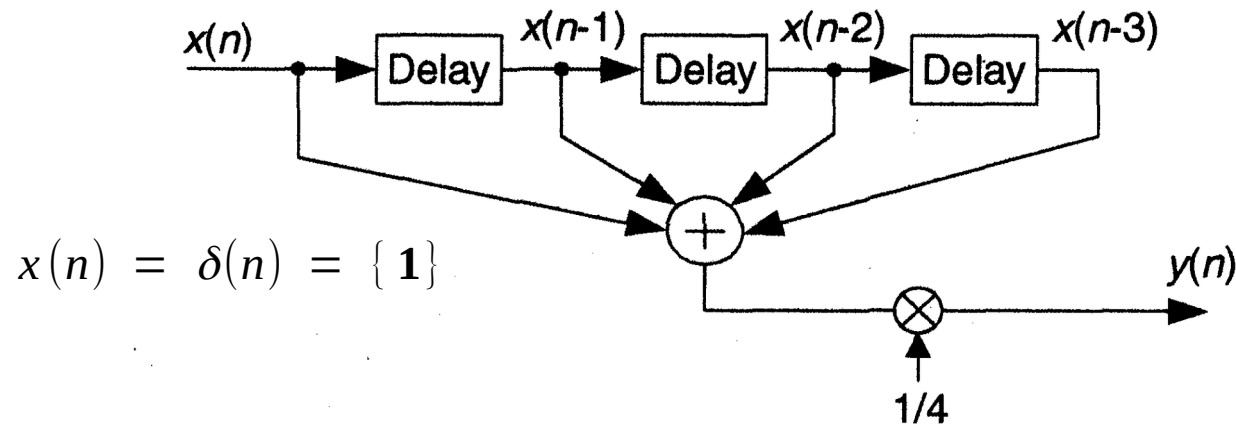
↓

- Lahko načrtamo vsak linearni časovno invariantni filter

Spektralni filtri

- Impulzni odziv, $h(n)$
- LTI sistem je popolnoma določen s $h(n)$

$$y(n] = \frac{1}{4} [x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)] = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(n-m)$$



$$h(n) = \{ \mathbf{1/4}, 1/4, 1/4, 1/4 \}$$

Spektralni filtri

- Za KEO (FIR) filtre je odziv, $h(k)$, na enotin vzorec $\delta(n)$ določen kar s koeficienti b_m

$$y(n) = \frac{1}{4}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)] = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(n-m)$$

$$h(n) = \{ \mathbf{1/4}, 1/4, 1/4, 1/4 \}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) \quad h(n) = \begin{cases} b_n, & \text{if } 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- *Odziv LČN sistema*, $y(n)$, na katerikoli vhodni signal $x(n)$ lahko izračunamo, če je znan odziv sistema na enotin vzorec, $\delta(n)$

- **→ Konvolucija**



Konvolucija

- **Ključni spektralni filtri** → filtri s Končnim Enotinim Odzivom (KEO, FIR)
- **Konvolucija**

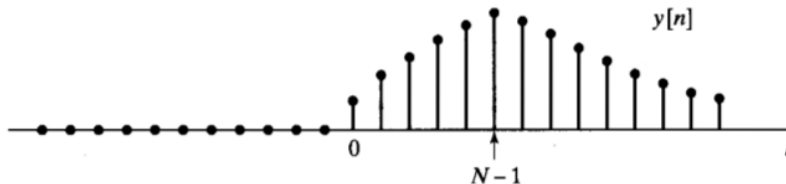
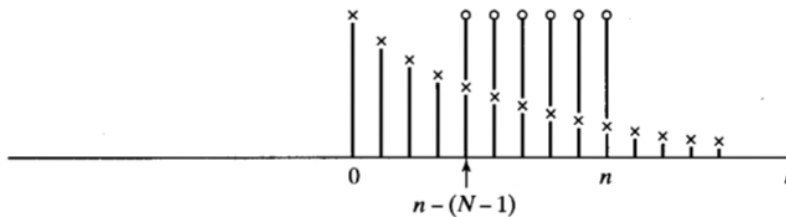
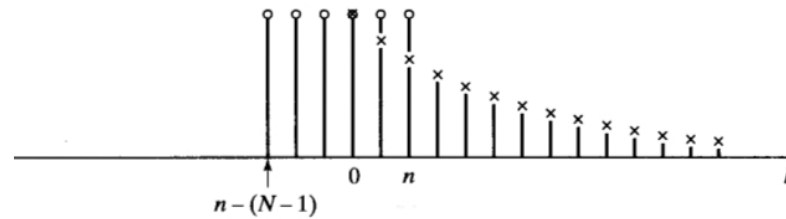
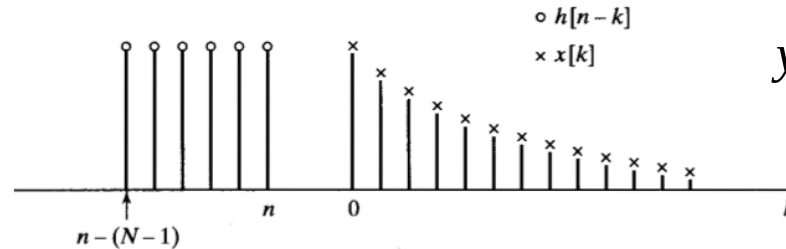
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = x(n) * h(n)$$

Konvolucija

- Izračunavanje**
 $h(n-k)$ je
 zrcaljen po času pri
 $n = 0$
 in nato premaknjen za
 n vzorcev

- Interpretacija
 konvolucije**
 Sistem drsi čez signal

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$



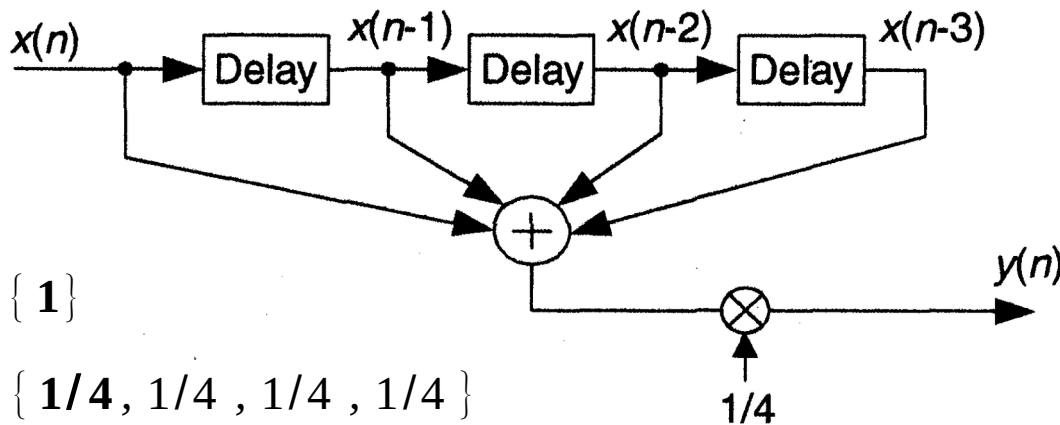
Analiza izven realnega časa:

zrcaljen $h(n)$ se
 premika čez signal $x(n)$

[Oppenheim, Schaffer]

Konvolucija

• **Primer**
$$y(n) = \frac{1}{4} [x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)] = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(n-m)$$



$$\delta(n) = \{ \mathbf{1} \}$$

$$h(n) = \{ \mathbf{1/4}, 1/4, 1/4, 1/4 \}$$

$$x(n) = \{ \mathbf{1}, 1 \}$$

$$y(n) = \{ \mathbf{1/4}, 1/2, 1/2, 1/2, 1/4 \}$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \longrightarrow y(n) = \{ \mathbf{1/4}, 1/2, 1/2, 1/2, 1/4 \}$$

Konvolucija

- **Ključni spektralni filtri** → filtri s Končnim Enotinim Odzivom (KEO, FIR)
- **Konvolucija**
 - * Sistem drsi čez signal (analiza izven realnega časa)

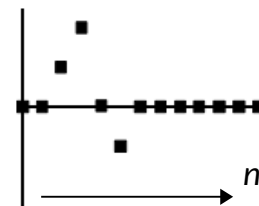
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = x(n) * h(n)$$

Flipped impulse response, $h(n)$



*

Input signal, $x(n)$



Output signal, $y(n)$



Konvolucija

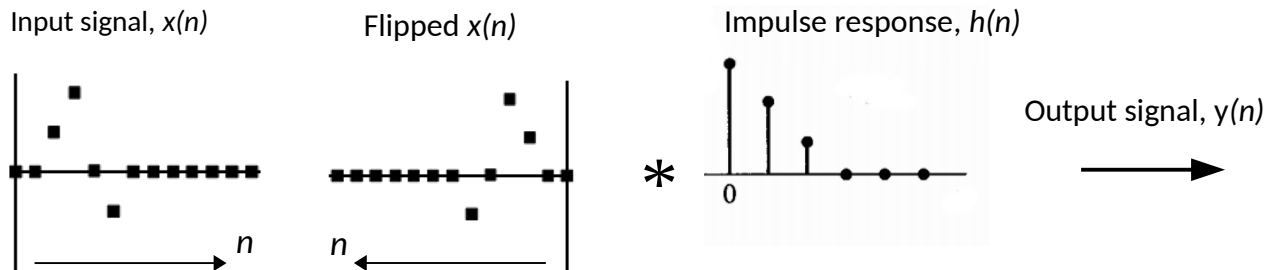
- **Ključni spektralni filtri** → filtri s Končnim Enotnim Odzivom (KEO, FIR)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = x(n) * h(n)$$

- **Konvolucija je komutativna**

* Signal vstop v sistem (analiza v realnem času)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = h(n) * x(n)$$



Ključni spektralni filtri

- **Ključni spektralni filtri** → filtri s Končnim Enotinim Odzivom (KEO, FIR)
- LDEKK enačba vsebuje samo **nerekurzivni člen**, $a_k = 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots, K$)

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) + \cancel{\sum_{k=1}^K a_k y(n-k)}$$

↓

• Lastnosti

- Lahko načrtamo vsak linearni časovno invariantni filter
- Impulzni odziv, $h(n)$, je končne dolžine in je definiran preprosto, kar s koeficienti b_m
- Filter načrtamo s primerno izbiro koeficientov b_m (visoko število potrebnih koeficientov)
- So vedno stabilni (nerekurzivni, ni povratne vezave)
- Faza (fazni odziv) je linearna (vse frekvence so na izhodu zakasnjene za isti čas), če je impulzni odziv simetričen ali antisimetričen
- Implementacija filtra z uporabo konvolucijske vsote je možna, $h(n) = b_n$, $n = 0, 1, 2, \dots, M$



Lastnost konvolucije

- Konvolucija dveh signalov v časovnem prostoru je **Fourierjev transformacijski par** produkta frekvenčnih spektrov teh dveh signalov

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k)$$



Diskretna Fourierjeva Transformacija (DFT)

- **DFT** končno dolge sekvence signala $x(n)$, ki ima N vrednosti, $0 \leq n \leq N - 1$ je frekvenčni spekter $X(k)$ v frekvenčnem prostoru, ki ima prav tako N vzorcev

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot n} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x(n) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) - j x(n) \sin\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) \right)$$

- **Fourier-jeva transformacija** diskretnega signala, $x(n)$, se imenuje **frekvenčni spekter** in je sekvenca kompleksnih števil

- Frekvenčni spekter: $X(k) = X_R(k) + j X_I(k) \quad X(k) = |X(k)| \cdot e^{j\theta(k)}$

- **Amplitudni spekter:** $|X(k)| = \sqrt{X_R^2(k) + X_I^2(k)}$

- **Fazni spekter:** $\theta(k) = \angle X(k) = \arctan\left(\frac{X_I(k)}{X_R(k)}\right)$

Diskretna Fourierjeva Transformacija (DFT)

- DFT razdeli (vzorči) interval $0 \dots Fs$ na N enakih intervalov za izračun $X(k)$

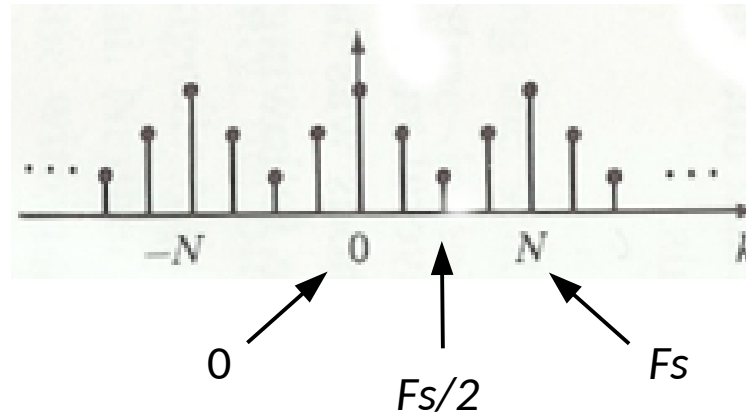
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot n}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x(n) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) - j x(n) \sin\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) \right)$$

$$|X(k)| \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

→ končna, diskretna
in periodična s
periodo N

Primer, $N = 4$



- F_s – Frekvenca vzorčenja
- $|X(k)|$ – N vzorcev frekvenčnega spektra, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$
- $\Delta F = F_s / N$ – Interval med dvema vzorcema v frekvenčnem spektru [Hz]
- $F_k = k \cdot \Delta F$ – Frekvenca k -tega vzorca v frekvenčnem spektru [Hz]

Diskretna Fourierjeva Transformacija (DFT)

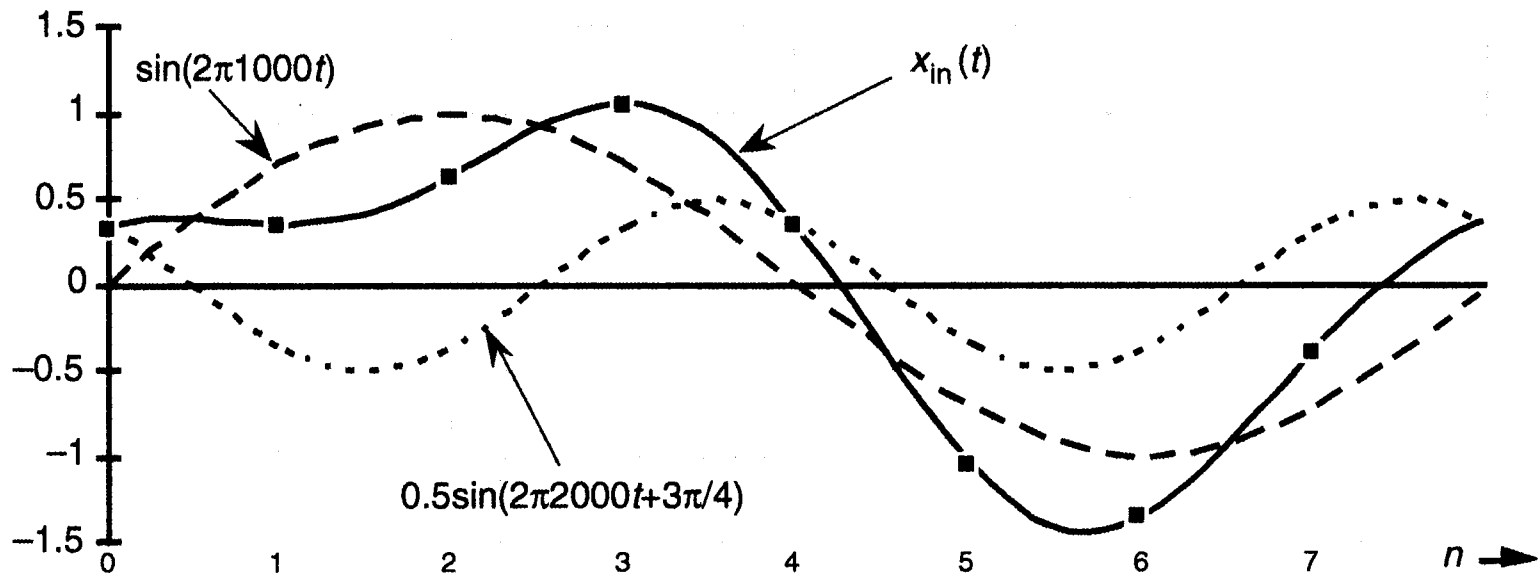
- DFT primer

$$x(n) = x_{in}(nT_s) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot nT_s) + 0.5 \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot nT_s + 3\pi/4)$$

Frekvenca vzorčenja, $F_s = 1/T_s = 8000$ smp/sec

$$x(0) = 0.3535, \quad x(1) = 0.3535, \quad x(2) = 0.6464, \quad x(3) = 1.0607$$

$$x(4) = 0.3535, \quad x(5) = -1.0607, \quad x(6) = -1.3535, \quad x(7) = -0.3535$$



[Lyons]

DFT

DFT primer

$$X(0) = \sum_{n=0}^7 x(n)$$

$$X(0) = 0.0 = 0 \angle 0^{\circ}$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^7 (x(n) \cos(\frac{2\pi 1}{8}n) - jx(n) \sin(\frac{2\pi 1}{8}n))$$

$$X(1) = 0.0 - j4.0 = 4 \angle -90^{\circ}$$



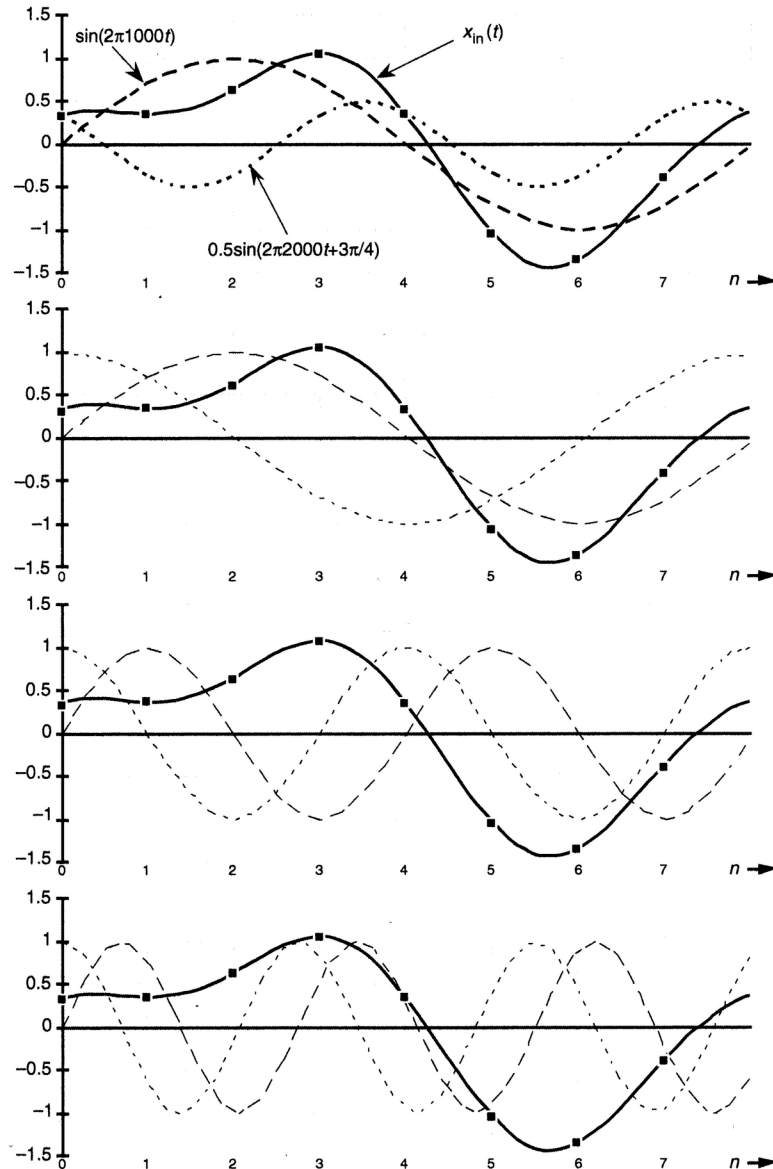
$$X(2) = \sum_{n=0}^7 (x(n) \cos(\frac{2\pi 2}{8}n) - jx(n) \sin(\frac{2\pi 2}{8}n))$$

$$X(2) = 1.414 + j1.414 = 2 \angle 45^{\circ}$$



$$X(3) = \sum_{n=0}^7 (x(n) \cos(\frac{2\pi 3}{8}n) - jx(n) \sin(\frac{2\pi 3}{8}n))$$

$$X(3) = 0.0 - j0.0 = 0 \angle 0^{\circ}$$





DFT

• DFT primer

$$X(4) = \sum_{n=0}^7 (x(n) \cos(\frac{2\pi 4}{8}n) - j x(n) \sin(\frac{2\pi 4}{8}n))$$

$$X(4) = 0.0 - j0.0 = 0 \neq 0^0$$

$$X(5) = \sum_{n=0}^7 (x(n) \cos(\frac{2\pi 5}{8}n) - j x(n) \sin(\frac{2\pi 5}{8}n))$$

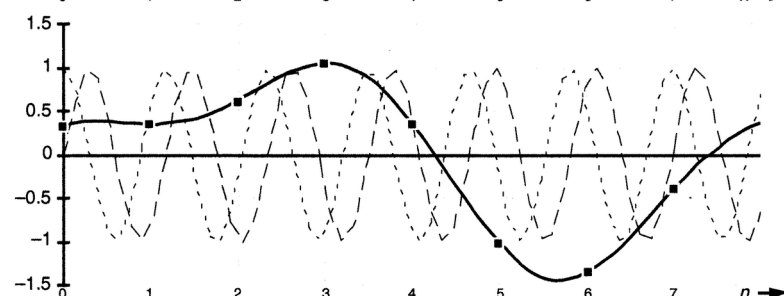
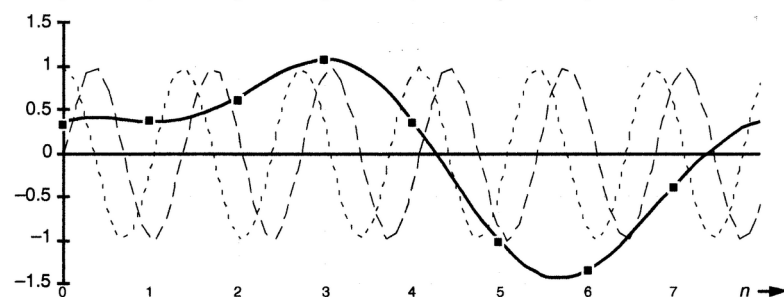
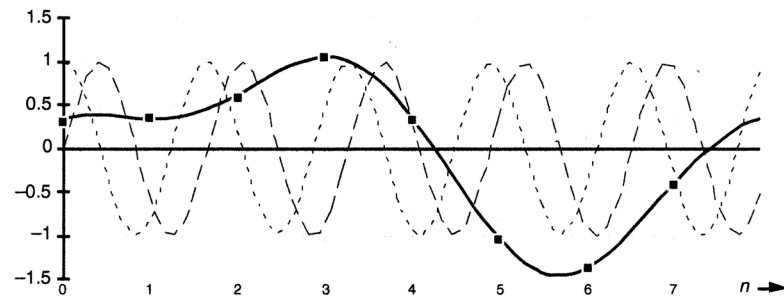
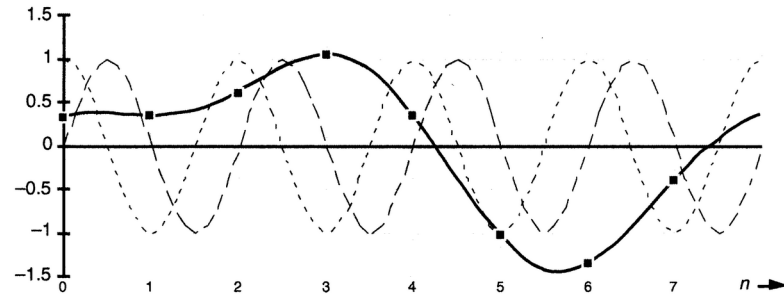
$$X(5) = 0.0 - j0.0 = 0 \neq 0^0$$

$$X(6) = \sum_{n=0}^7 (x(n) \cos(\frac{2\pi 6}{8}n) - j x(n) \sin(\frac{2\pi 6}{8}n))$$

$$X(6) = 1.414 - j1.414 = 2 \angle -45^0$$

$$X(7) = \sum_{n=0}^7 (x(n) \cos(\frac{2\pi 7}{8}n) - j x(n) \sin(\frac{2\pi 7}{8}n))$$

$$X(7) = 0.0 + j4.0 = 4 \angle 90^0$$



Diskretna Fourierjeva Transformacija (DFT)

- DFT primer

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi k}{N} \cdot n}$$

$$X(0) = 0.0 - j0.0 = 0 \angle 0^\circ$$

$$X(1) = 0.0 - j4.0 = 4 \angle -90^\circ$$

$$X(2) = 1.414 + j1.414 = 2 \angle 45^\circ$$

$$X(3) = 0.0 - j0.0 = 0 \angle 0^\circ$$

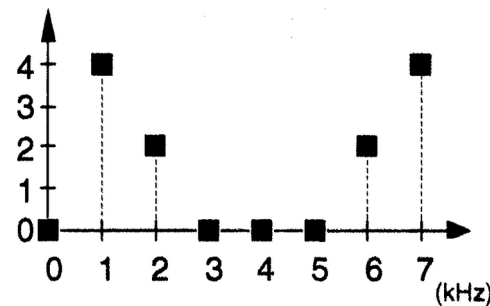
$$X(4) = 0.0 - j0.0 = 0 \angle 0^\circ$$

$$X(5) = 0.0 - j0.0 = 0 \angle 0^\circ$$

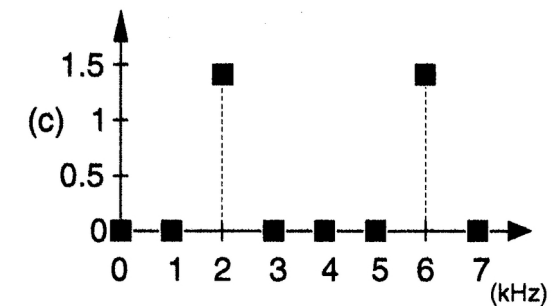
$$X(6) = 1.414 - j1.414 = 2 \angle -45^\circ$$

$$X(7) = 0.0 + j4.0 = 4 \angle 90^\circ$$

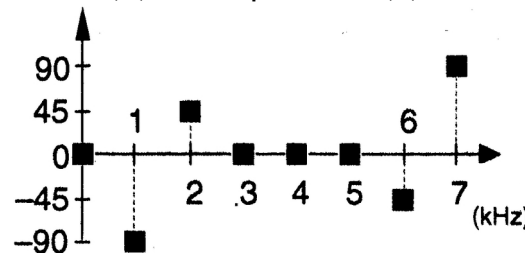
(a) Amplitudni spekter $|X(k)|$



(c) Realni del $X(k)$



(b) Fazni spekter $\Theta(k)$



(d) Imaginarni del $X(k)$



Za realne signale velja: $X(m) = X^*(N-m)$, $m = 1, 2, \dots, N-1$

DFT enotinega vzorca

- **Primer**, diskretna Fourierjeva transformacija (DFT) enotinega vzorca, $x(n) = \delta(n)$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot n} = \delta(0) e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot 0} = 1$$



Amplitudni odziv filtra

- Če je amplitudni spekter amplitudni spekter signala $x(n) = h(n)$,

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j \frac{2\pi k}{N} \cdot n}$$

ki je dobljen kot odziv sistema na enotin vzorec $\delta(n)$, potem rečemo temu amplitudnemu spektru **amplitudni odziv filtra** in ga označimo s $|H(k)|$

- Frekvenčni odziv:

$$H(k) = H_R(k) + j H_I(k)$$

- **Amplitudni odziv:**

$$|H(k)| = \sqrt{H_R^2(k) + H_I^2(k)}$$

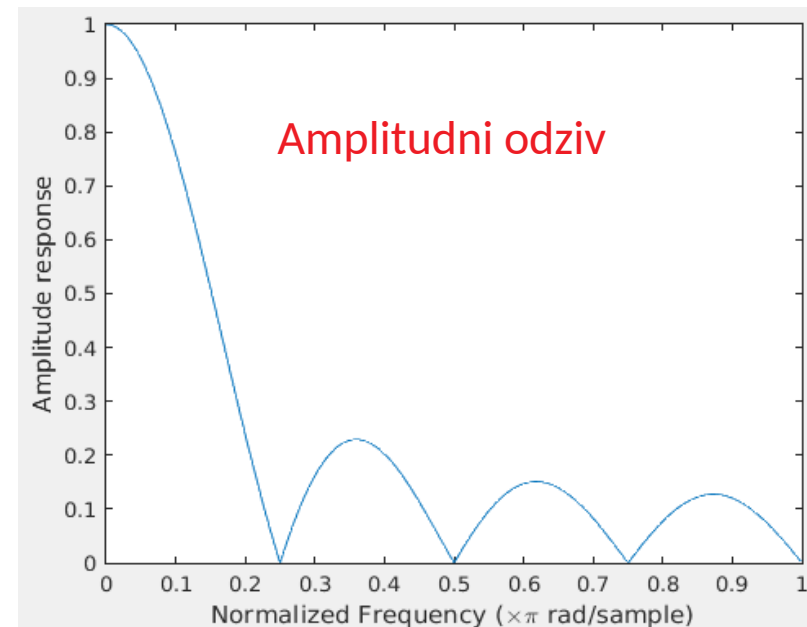
Amplitudni odziv filtra

- Primer **impulznega odziva** in pripadajočega **amplitudnega odziva** KEO (FIR) filtra (glajenje s tekočim povprečenjem, $M = 8$)

$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} x(n-l)$$

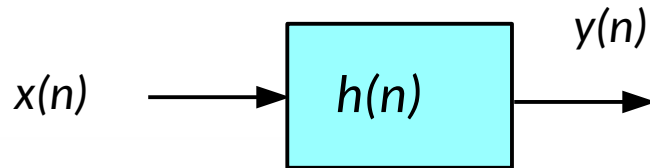
$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{M}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$|H_L(k)|$$



Določanje izhoda LČN sistema v frekvenčni domeni

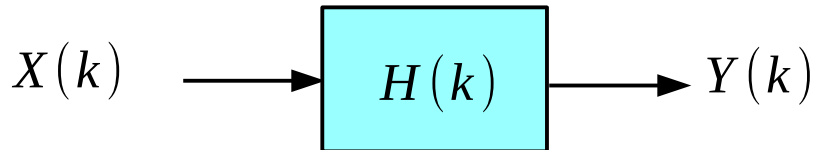
- Odziv LČN sistema v časovni domeni (konvolucija v časovni domeni)



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- **Relacija za določanje izhoda LČN sistema v frekvenčni domeni**

→ Konvolucija v časovni domeni postane množenje v frekvenčni domeni



$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k)$$

Spekter izhodnega signala

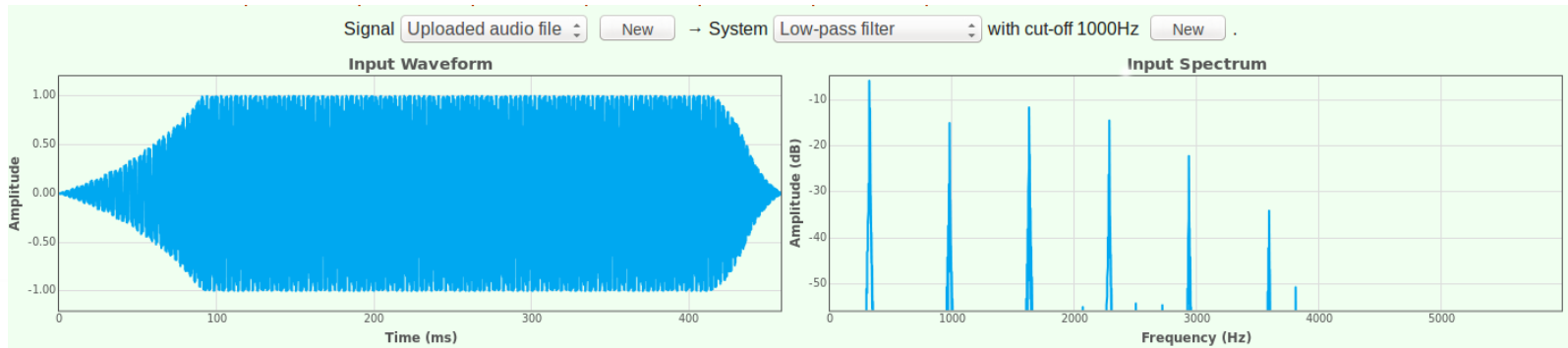
$$Y(k) = H(k) \cdot X(k)$$

Izhodni signal

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)]$$

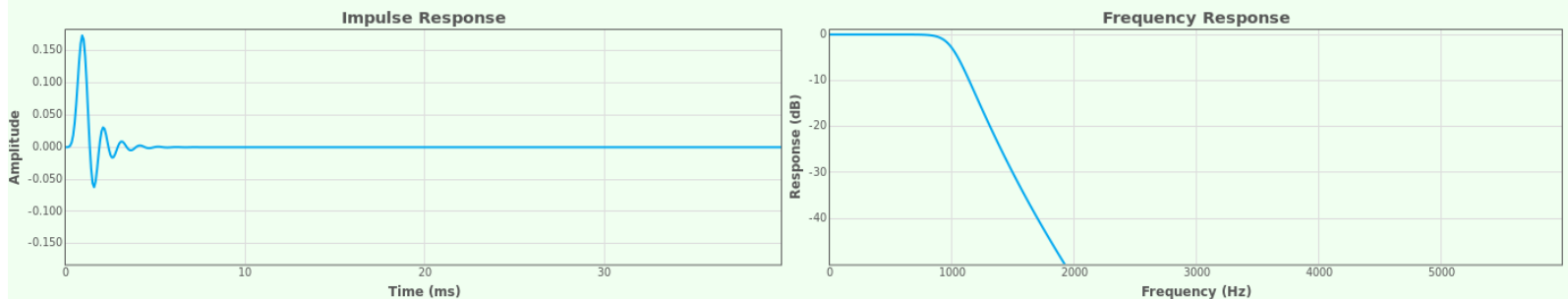
Odziv LČN sistema v časovni in frekvenčni domeni

$x(n)$
 Play



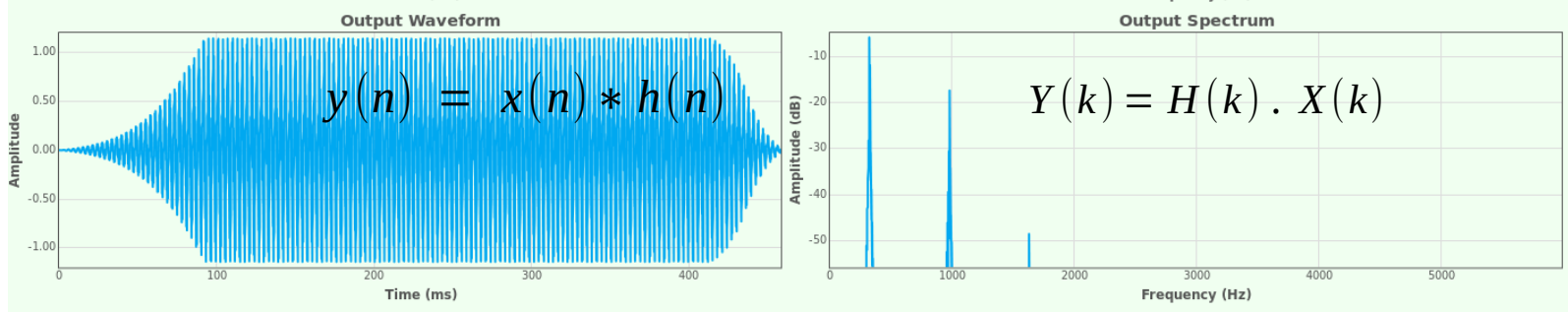
$X(k)$
 $|X(k)|$

$h(n)$



$H(k)$
 $|H(k)|$

$y(n)$
 Play



$Y(k)$
 $|Y(k)|$

- <http://www.speechandhearing.net/laboratory/esystem/>

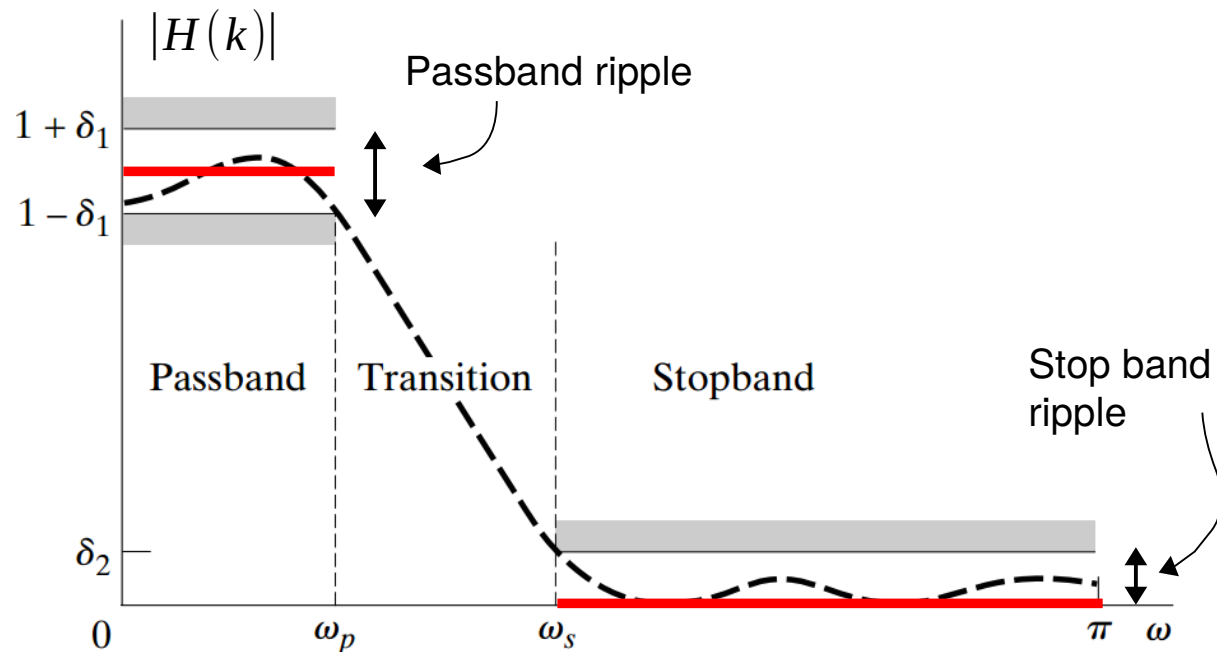
Načrtovanje spektralnih filtrov

• Specifikacija

- Področje prepusta (~ 1)
- Področje zapore (~ 0)
- Vmesno področje

• Omejitve zmogljivosti

- Čim nižja valovitost v področju prepusta
(nizka vrednost $2 \cdot \delta_1$)
- Čim ožje vmesno področje
- Čim višja atenuacija v področju zapore
(čim manjša valovitost v področju zapore,
nizka vrednost δ_2 , ali $2 \cdot \delta_2$)



Resnični amplitudni odziv \sim **Željeni amplitudni odziv**

$$|H(k)|$$

$$|H_D(k)|$$

δ_1 - napaka v področju prepusta

δ_2 - napaka v področju zapore

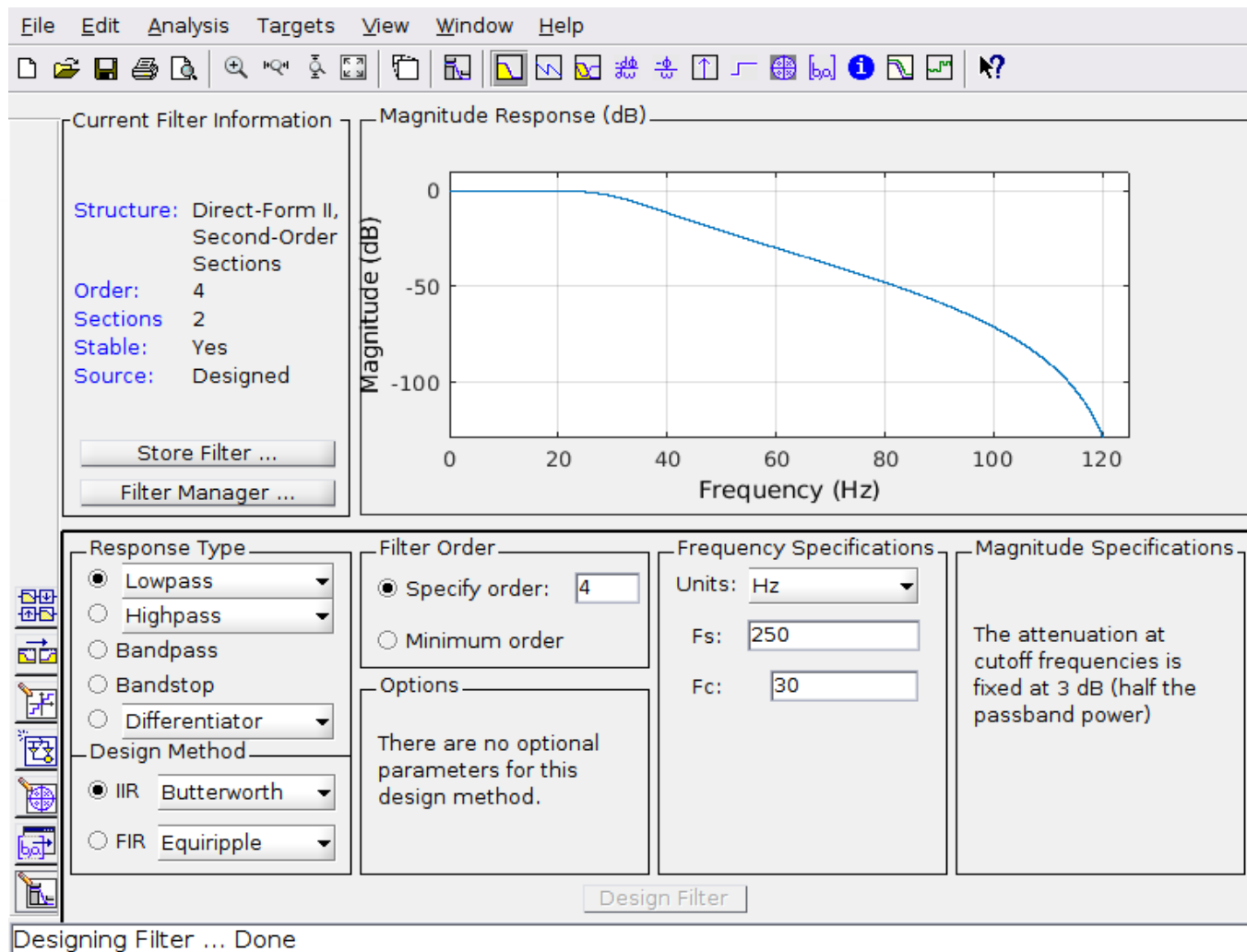


Načrtovanje filtrov v MATLAB-u

- **Načrtovanje FIR filtrov v MATLAB-u**
 - Obstojajo različni kriteriji za načrtovanje FIR filtrov z ozirom na impulzni odziv
 - * **Metoda najmanjše srednje kvadratne napake:** `firls`
 - * **Metoda minimax (Parks-McClellan-ov algoritem):** `firpm`
 - * **Glede na željeno (razumno) dolžino impulznega odziva (red filtra) (Parks-McClellan-ov algoritem):** `firpmord`
- **MATLAB-ovo orodje:** `filterDesigner`

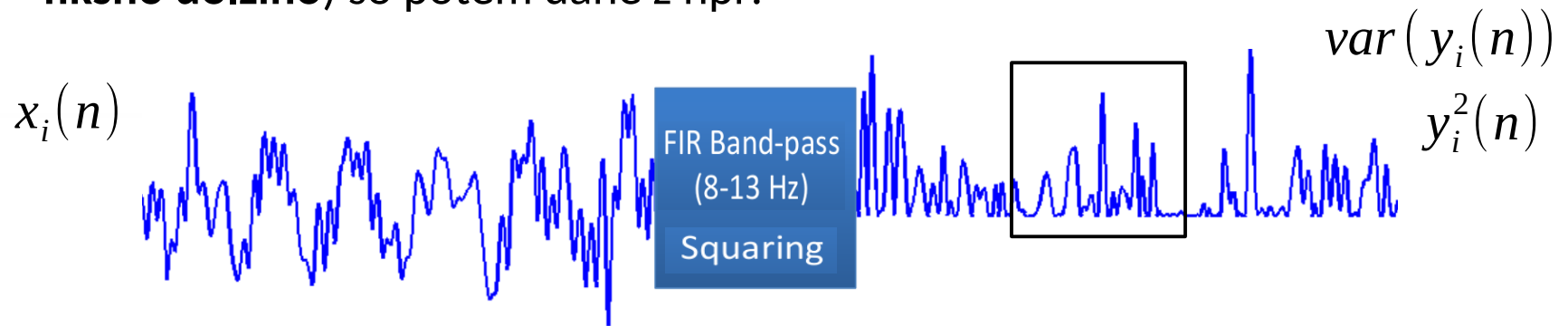
Načrtovanje filtrov v MATLAB-u

- MATLAB-ovo orodje **filterDesigner** za načrtovanje FIR (in IIR filtrov)



Časovne značilke

- Značilke f ali $f(n)$ signalov X (znotraj danega okna, ali drsečega okna s fiksno dolžino) so potem dane z npr.



$$y_i(n) = \sum_{m=0}^M b_m x_i(n-m)$$

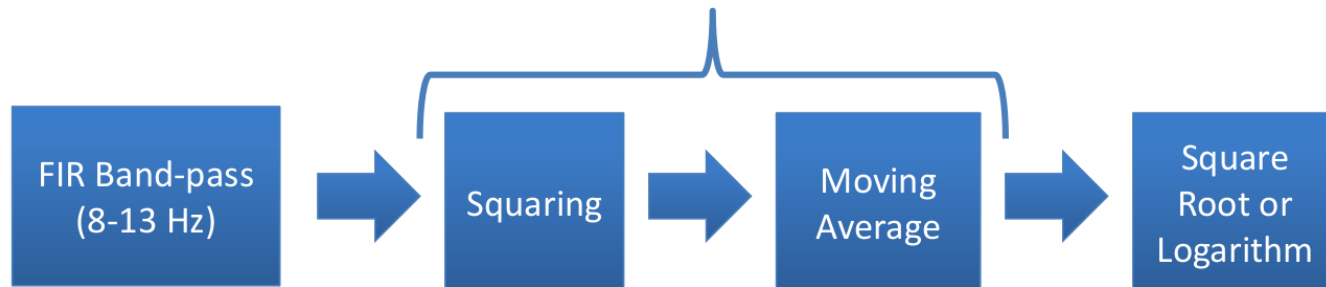
$$Y(n) = [y_1(n), y_2(n), \dots, y_N(n)]^T$$

$$f(n) = \log(\text{Var}(\mathbf{Y}))$$

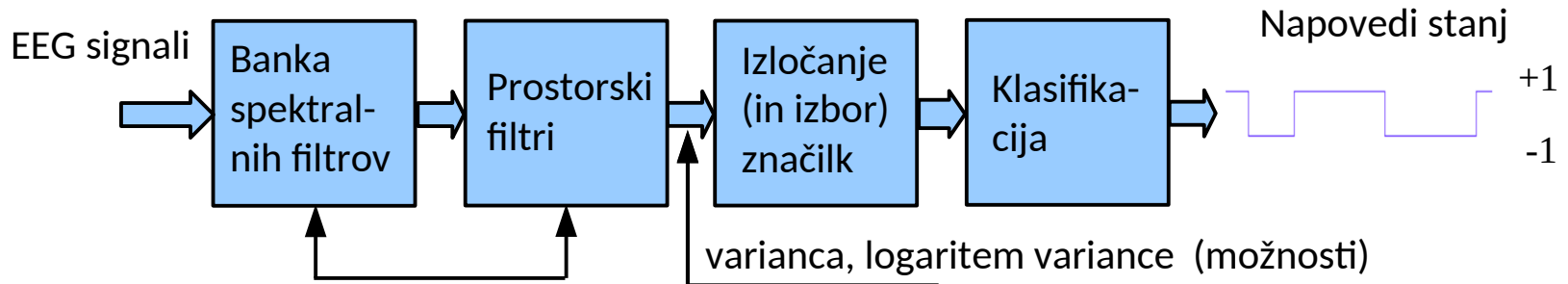
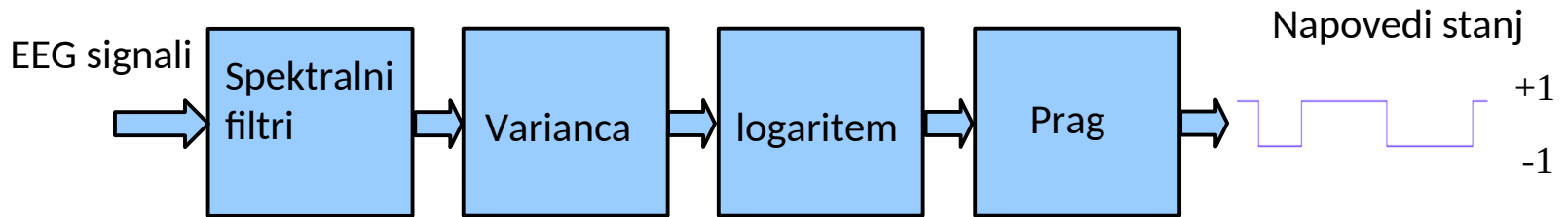
$$f(n) = \log(\text{Avg}(\text{var}(\mathbf{Y})))$$

$$f(n) = \text{sqrt}(\text{Avg}(\text{var}(\mathbf{Y})))$$

Running Variance



Tipične arhitekture VMR



(Spektralni filtri)

- **Lastnosti spektralnih, Linearnih, Časovno Nespremenljivih (LČN), in kavzalnih filtrov**
 - (a) **Superpozicija**. Če je odziv filtra na $x_1(n)$, $y_1(n)$, in je odziv filtra na $x_2(n)$, $y_2(n)$, potem je odziv filtra na $x_1(n) + x_2(n)$, $y_1(n) + y_2(n)$.
 - (b) **Skaliranje**. Če je odziv filtra na $x(n)$, $y(n)$, potem je odziv filtra na $c.x(n)$, $c.y(n)$, kjer je c realna ali kompleksna konstanta.
- **Linearnost**. Če velja superpozicija in skaliranje.

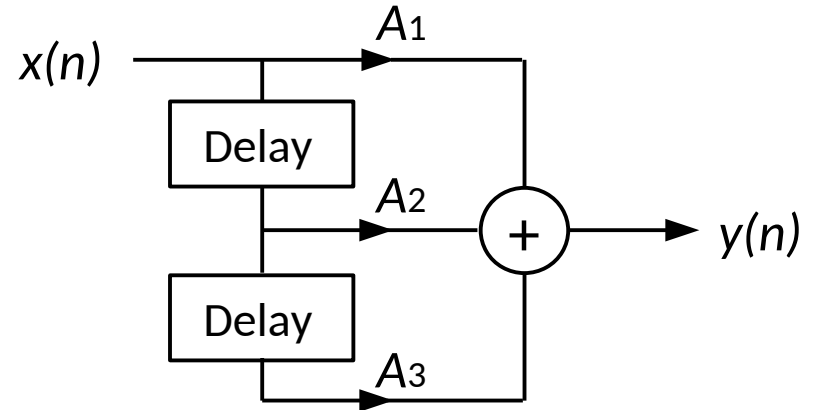
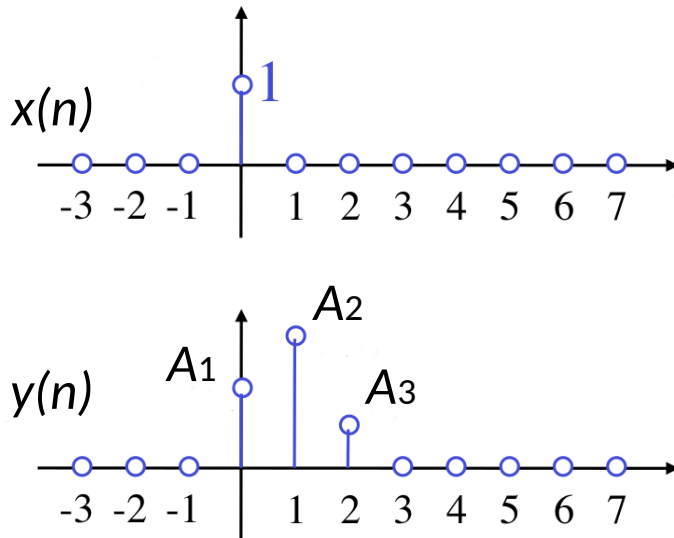
$$T [a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 T [x_1(n)] + a_2 T [x_2(n)]$$

- **Časovna invarianca**. Če je odziv filtra na $x(n)$, $y(n)$, potem je odziv filtra na $x(n-n_0)$ (vhod $x(n)$ zakasnjjen za n_0 vzorcev), $y(n-n_0)$ (originalni odziv zakasnjjen za n_0 vzorcev).
- **Kavzalnost**. Če je izhod filtra $y(n)$ ob vsakem času n odvisen le od vrednosti vzorcev $x(m)$, za $m \leq n$, je filter **kavzalen**, sicer je **nekavzalen**.
- **KEO in NEO filtri definirani z LDEKK enačbo so LČN in kavzalni sistemi**

(Spektralni filtri)

- Impulzni odziv

$$y(n) = A_1 x(n) + A_2 x(n-1) + A_3 x(n-2)$$



$$x(n) = \delta(n) \text{ enotin vzorec} \quad \delta(n) = \{ \mathbf{1} \}$$

$$y(n) = h(n) \text{ impulzni odziv}$$

$$y(n) = h(n) = \{ A_1, A_2, A_3 \} = \{ A_1, A_2, A_3 \}$$

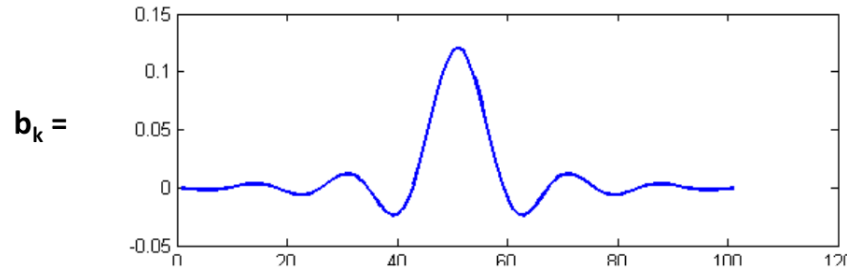
\uparrow
 $n=0$

→ LTI sistem je popolnoma določen s $h(n)$

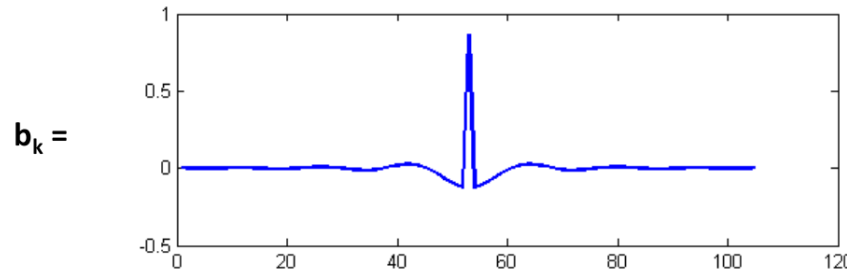
(Spektralni filtri)

- Implementacije FIR filtrov (impulzni odzivi, $h(n)$)

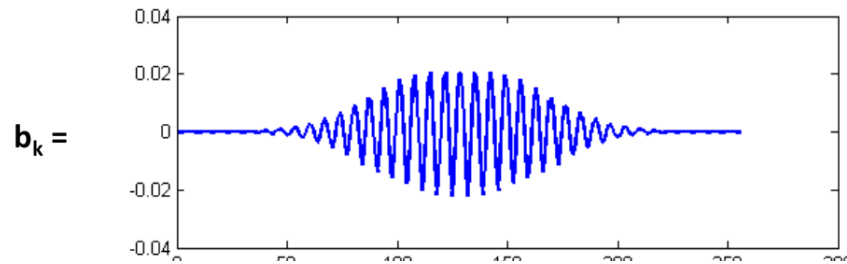
- Lowpass:



- Highpass:



- Bandpass:



$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & \text{if } 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



(DFT in Inverzna Diskretna Fourierjeva Transformacija (IDFT))

- DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot n} \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$

- $X(k)$ - N vzorcev frekvenčnega spektra, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$
- $\Delta F = F_s / N$ - Interval med dvema vzorcema v frekvenčnem spektru [Hz]
- $F_k = k \cdot \Delta F$ - Frekvenca k -tega vzorca v frekvenčnem spektru [Hz]

- Inverzna DFT (IDFT)

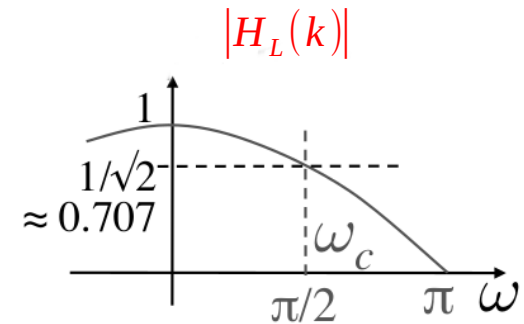
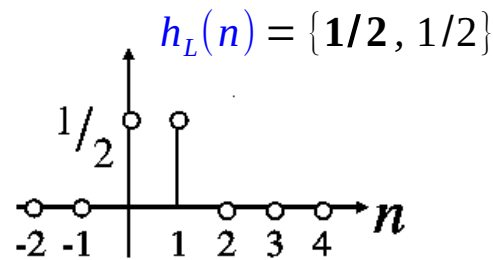
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \cdot k} \quad \left(\frac{1}{N/2}\right)$$

→ končna, diskretna in periodična s periodo N

(Spektralni filtri)

- Primera **impulznih odzivov** in pripadajočih **amplitudnih odzivov** dveh KEO (FIR) filtrov

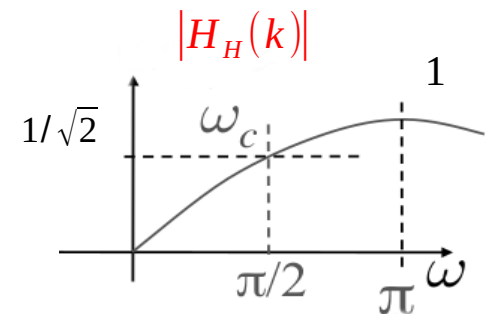
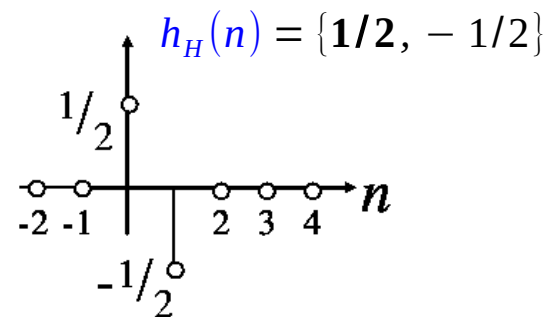
$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1))$$



$$Y(k) = H(k) \cdot X(k)$$


$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)]$$

$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(n-1))$$



(Spektralni filtri)

- **Spektralni filtri** → filtri z Neskončnim Enotinim Odzivom (NEO, IIR)
- LDEKK enačba vsebuje tudi **rekurzivni člen**, vsaj en $a_k \neq 0$

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) + \sum_{k=1}^K a_k y(n-k)$$


- **Lastnosti**

- Impulzni odziv, $h(n)$, je neskončne dolžine
- **Lahko načrtamo vsak linearni časovno invariantni filter**
- Filter načrtamo s primerno izbiro koeficientov a_k in b_m (nizko število potrebnih koeficientov)
- So lahko nestabilni (če so poli na ali izven kroga enote v Z ravnini, npr., $y(n) = 1.5 y(n-1)$)
- Faza (fazni odziv) je nelinearnen (frekvence na izhodu so zakasnjene in premaknjene ena proti drugi)
- Primer: $y(n) = x(n) - 0.7 x(n-1) + 0.5 y(n-1)$

(Spectral filters)

- **FIR filters.** If all the a_k coefficients are zero, then the output depends only on a finite number of values of the input. Termed also as *all-zero*, or *moving average (MA) filters*.
- **IIR filters.** If at least one of the a_k coefficients is nonzero:
 - (a) **Autoregressive (AR) filters.** If all of the b_m coefficients except b_0 are zero, the output depends only on the current value of the input and a finite number of past values of the output. Termed also as *all-pole*, *purely recursive*, or *autoregressive (AR) filters*. The term “autoregressive” means that the output is approximately a sum of its own past values.
 - (b) **Autoregressive, moving-average (ARMA) filters.** Both a_k and b_m coefficients are nonzero, with $K \geq 1$ and $M > 0$. Also termed as *pole-zero* or *autoregressive, moving average (ARMA) filters*.

$$y(n) = \sum_{k=1}^K a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$