Linearna algebra	**Teden 12**
Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik, 1. del	
	Polona Oblak

1. Poudarki 12. tedna

- Preden začnete oglede predavanj, si odgovorite na naslednji vprašanji. Definirajmo štiri linearne preslikave $\varphi, \zeta, \eta, \vartheta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
  (a) φ je projekcija na x-os.
  (b) ζ je zrcaljenje čez premico $y = x$.
  (c) η je rotacija okoli koordinatnega izhodišča.
  (d) Matrika preslikave ϑ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$ je enaka $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

  Za vsako od preslikav $\varphi, \zeta, \eta, \vartheta$ ugotovite, ali obstaja kakšen neničeln vektor, ki se slika v svoj večkratnik. Poiščite tudi ustrezne večkratnike. (Če ne gre, poglejte namig[1].)
- Če ste našli takšne vektorje linearnih preslikav $\varphi, \zeta, \vartheta$, ki se slikajo v svoj večkratnik, ste pravkar našli *lastne vektorje* linearnih preslikav. Pripadajoče večkratnike pa imenujemo *lastne vrednosti* preslikav.
- Uvod, video.
- Definicije
  - Lastne vrednosti in lastni vektorji, video.
  - Primer, video.
  - Lastni podprostor, video.
  - Primer, lastni podprostor pri lastni vrednosti 0,video.
- Računanje lastnih vrednosti
  - Kako poračunamo lastne vektorje pri dani lastni vrednosti, video.
  - Lastne vrednosti in karakteristični polinom. video.
  - Primer, video.
  - Povzetek, video.
- Lastnosti
  - Lastni vektorji pri različnih lastnih vrednostih so linearno neodvisni, video.
  - Lastne vrednosti trikotnih matrik ležijo na njeni diagonali, video.

[1] V enem od primerov takšen vektor v $\mathbb{R}^2$ ne obstaja, saj se noben vektor ne slika v svoj večkratnik. V ostalih treh primerih lahko najdete po dva linearno neodvisna vektorja, ki se slikata v svoj večkratnik. Večkratniki, ki pripadajo vektorjem, so (ne nujno v pravem vrstnem redu) v enem od primerov 0,1, drugem 1, -1, tretjem 2,3. Bo šlo sedaj?

  - Lastne vrednosti matrike in njene transponiranke so enake, video.
  - Produkt lastnih vrednosti matrike je enak njeni determinanti, video.
  - Vsota lastnih vrednosti matrike je enaka njeni sledi. Primer računanja lastnih vrednosti 2×2 matrike, video.
  - Lastne vrednosti potenc in inverzov matrik, video.
- Oglejte si še video 3Blue1Brown, Eigenvectors and eigenvalues, Essence of linear algebra, chapter 14.
- Zapiski predavanj, 12. teden.

2. Ali razumem snov?

(1) Matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - x^2$. Izračunajte $\operatorname{rang}(A + I)$.

(2) Naj ima 4×4 matrika A dvojno lastno vrednost 2, enojno lastno vrednost 1 ter determinanto enako 12. Določite njen karakteristični polinom.

(3) Za 4×4 matriko A naj velja $\operatorname{rang}(A - 5I) = 2$, $\operatorname{rang}(A - 4I) = \operatorname{rang}(A - 3I) = 3$ ter $\operatorname{rang}(A - 2I) = \operatorname{rang}(A - I) = 4$. Določite njen karakteristični polinom.

(4) Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor. Pokažite, da je vektor $\vec{a}$ lastni vektor matrike $\vec{a}\vec{a}^T$.

(5) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika, za katero velja $A^2 = A$. Pokažite, da je vsak vektor $\vec{y} = A\vec{x} \in C(A)$ lastni vektor matrike A. Določite tudi pripadajočo lastno vrednost.

(6) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika, za katero velja $A^2 = A$. Pokažite, da je za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\vec{x} - A\vec{x}$ lastni vektor matrike A. Določite tudi pripadajočo lastno vrednost.

(7) Naj bo A matrika velikosti 3×3, ki ima pri lastni vrednosti 1 lastni vektor $\vec{x} = [1,\ 2,\ 3]^T$ in pri lastni vrednosti -1 lastni vektor $\vec{y} = [3,\ 2,\ 1]^T$. Izračunajte $A^{2019}(\vec{x} + \vec{y})$.

(8) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ simetrična matrika z enojnima lastnima vrednostima -1 in 1, njen rang pa je enak $\operatorname{rang}(A) = 3$. Izračunajte njeno determinanto $\det(A)$.

(9) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ matrika z lastnimi vrednostmi -1, 1, $\frac{1}{2}$, 2 in 3, za matriko $B \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ pa velja $\det(B) = 2$. Izračunajte determinanto $\det(AB^T)$.

(10) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.
  (a) Če je 0 lastna vrednost matrike A, potem je A obrnljiva.
  (b) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Če ima linearni sistem enačb $Ax = 0$ netrivialno rešitev, potem je 0 lastna vrednost matrike A.

   (c) Če ima matrika A lastno vrednost λ, potem ima matrika $A+\alpha I$ lastno vrednost $\lambda+\alpha$.

(11) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 86(a), 88 (a)-(b), 93.

3. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelka 6.1 in 6.2.
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 6.1.
(3) Gilbert Strang, Lecture 21: Eigenvalues and eigenvectors.
(4) Preberite si kaj več o uporabi lastnih vrednosti in lastnih vektorjev:
   (a) Metoda glavnih smeri (PCA)
   (b) Lastni vektorji spletnih iskalnikov
   (c) Pixarjeve lastne vrednosti in vektorji