Linearna algebra **Teden 10**

Ortogonalnost, 1. del

Polona Oblak

1. Poudarki 10. tedna

- Napovednik 5. poglavja: Ortogonalnost.
- Uvod
  - Ponovite skalarni produkt z ogledom 3Blue1Brown, scalar product.
  - Za definicijo pravokotnosti/ortogonalnosti potrebujemo skalarni produkt. Primeri skalarnih produktov, ki jih boste kdaj potrebovali: video.
- Ortogonalna množica vektorjev, ortonormirana množica vektorjev, definiciji
  - Vsaka ortogonalna množica vektorjev je linearno neodvisna. video.
- Ortonormirana baza
  - Definicija in lastnosti, video
  - Primer
- Gram-Schmidtov postopek za ortogonalizacijo vektorjev:
  - Ideja
  - Postopek
  - Primer in še enkrat isti primer z menjavo vrstnega reda vhodnih vektorjev
  - igrajte se z Wolframovo demonstracijo
- Ortogonalni komplement.
  - Definicija
  - Lastnosti
  - Ortogonalna zveza med ničelnim in stolpčnim prostorom matrike
- Zapiski predavanj, 10. in 11. teden.

2. Ali razumem snov?

(1) Naj bo $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_5}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^5$ in $\vec{x} = \alpha_1\vec{v_1} + \ldots + \alpha_5\vec{v_5}$. Pokažite, da je $||\vec{x}||^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_5^2$.

(2) Naj bo U vektorski prostor dimenzije $\dim U = k$ v $\mathbb{R}^n$. Pokažite, da je tudi $U^\perp$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$.

(3) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{9\times 11}$ matrika ranga 7. Določite dimenzije prostorov $C(A)$, $C(A^\perp)$, $N(A)$ in $N(A^\perp)$.

(4) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.

(a) Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ baza prostora V.

(b) Za simetrično matriko A velja $N(A) = C(A)^\perp$.

(c) Če ima za neka $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ rešitev, potem je vektor $\vec{b}$ pravokoten na vsak vektor $\vec{y} \in N(A^T)$.

(d) Vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ je ortogonalni komplement vektorskega prostora $W \subseteq \mathbb{R}^n$, če je vsak vektor iz V pravokoten na vsak vektor iz W.

(5) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 65–68, 72, 74–78, 80, 82–84.

↯ (6) Na vektorskem prostoru $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ zveznih funkcij na intervalu $[-\pi, \pi]$ definirajmo predpis

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \tag{1}$$

ki funkcijama f in g vrne število $\langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$.

(a) Pokažite, da je

(i) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$,

(ii) $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$,

(iii) $\langle f, f\rangle \geq 0$ ter

(iv) da je $\langle f, f\rangle = 0$ natanko tedaj, ko je f ničelna funkcija.

S tem ste pokazali, da je predpis (**??**) skalarni produkt na prostoru zveznih funkcij na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) Dolžino funkcije f definiramo kot

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx}$$

norma (ali dolžina) funkcije f. Označimo funkcije

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ f_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(ix) \\ g_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(ix) \end{aligned}$$

za $i = 1, 2, \ldots$.

(c) Pokažite, da je

(i) $\langle f_i, f_i\rangle = 1$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$,

(ii) $\langle g_i, g_i\rangle = 1$ za $i = 1, 2, \ldots$,

(iii) $\langle f_0, f_i\rangle = 0$ za $i = 1, 2, \ldots$ in

(iv) $\langle f_i, g_j\rangle = 0$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$ ter $j = 1, 2, \ldots$.

S tem ste pokazali, da so funkcije $\{f_0, f_1, f_2, \dots, g_1, g_2, \dots\}$ ortonormirana množica v $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$. Ta igra pomembno vlogo pri Fourirjevih vrstah in transformacijah.

3. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelka 4.1. in 4.4.4.
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Sections 4.1, 4.4.
(3) Gilbert Strang, Video Lectures:
   (a) Lecture 14: Orthogonal vectors and subspaces.
   (b) Lecture 17: Orthogonal matrices and Gram-Schmidt, od 25:06 dalje.