Linearna algebra **Teden 7**

Linearne preslikave

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Linearna preslikava.
- Matrika, ki pripada linearni preslikavi v standardnih bazah.
- Jedro in slika linearne preslikave.

2. Definicija linearne preslikave

V matematiki se vedno znova in v različnih kontekstih srečujemo s pojmom *preslikave* med dvema množicama. Spomnimo se, da je preslikava $f\colon A \to B$ množice A v množico B takšen predpis, ki vsakemu elementu $a \in A$ enolično predpiše vrednost $b = f(a) \in B$.

Mi bomo opazovali preslikave $\tau\colon V \to U$ vektorskih prostorov V in U, ki spoštujejo strukturo vektorskega prostora. To pomeni, da

(1) slikajo vsoto vektorjev v in u v vsoto slik vektorjev $\tau(v) + \tau(u)$ in
(2) večkratnik vektorja v v večkratnik slike vektorja $\tau(v)$.

Linearno preslikavo torej definirajmo na naslednji način.

Naj bosta V in U vektorska prostora. Preslikava $\tau\colon V \to U$ je *linearna preslikava*, če velja

(LP1) $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$ za vsaka $v, u \in V$
(LP2) $\tau(\alpha v) = \alpha\tau(v)$ za vsak $v \in V$ in vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.

V posebnem, če v (LP2) vstavimo $\alpha = 0$, dobimo

$$\tau(\mathbf{0}) = \tau(0 \cdot v) = 0 \cdot \tau(v) = \mathbf{0}$$

za poljuben $v \in V$. Pri tem je prvi $\mathbf{0}$ ničelni vektor v vektorskem prostoru V, zadnji $\mathbf{0}$ pa ničelni vektor v vektorskem prostoru U. S tem smo pokazali naslednjo lastnost linearne preslikave.

Lema 1. *Za vsako linearno preslikavo τ velja, da slika ničelni vektor v ničelnega, torej*

$$\tau(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Hitro lahko preverimo naslednjo ekvivalentno definicijo linearne preslikave.

Izrek 1. *Preslikava $\tau\colon V \to U$ je linearna natanko tedaj, ko velja*

$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u) \tag{1}$$

za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Pokažimo najprej, da če je preslikava $\tau\colon V \to U$ linearna, potem ohranja tudi linearne kombinacije (1). Za linearno preslikavo τ za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ po lastnosti (LP1) velja $\tau(\alpha v + \beta u) = \tau(\alpha v) + \tau(\beta u)$. Nadalje po (LP2) sledi, da je $\tau(\alpha v) + \tau(\beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u)$, iz česar sledi (1).

Sedaj moramo pokazati še nasprotno, da je vsaka preslikava τ z lastnostjo (1) linearna. Izberimo torej preslikavo τ, za katero velja (1) za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. V posebnem velja ta enakost tudi za $\alpha = \beta = 1$, iz česar sledi $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$ za vse $v, u \in V$, torej (LP1). Če v (1) izberemo $\beta = 0$, potem iz (1) dobimo $\tau(\alpha v) = \alpha\tau(v)$ za vse $v \in V$ ter vse $\alpha \in \mathbb{R}$, torej (LP2). S tem smo pokazali, da je vsaka preslikavaz lastnostjo (1) tudi linearna. □

Če želimo za preslikavo pokazati, da je linearna, je v večini primerov hitreje preveriti lastnost (1) kot pa lastnosti (LP1) in (LP2). V nasprotnem, če želimo za preslikavo pokazati, da ni linearna, imamo več možnosti. Ovržti moramo eno od lastnosti, ki veljajo za linearno preslikavo. To pomeni, da je dovolj ovržti le eno od lastnosti (LP1), (LP2), (1) ali pa lastnost iz leme 1. Torej, če preslikava vektorskih prostorov ne slika ničelnega vektorja v ničelnega, potem to ni linearna preslikava.

3. Primeri linearnih preslikav

Primer 1. Ničelna preslikava *je preslikava*

$$\begin{aligned} \nu : V &\to U \\ v &\mapsto \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ki slika vsak vektor vektorskega prostora V v ničelni vektor $\mathbf{0} \in U$. Hitro se prepričamo, da za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$\nu(\alpha v + \beta u) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \alpha\,\mathbf{0} + \beta\,\mathbf{0} = \alpha\nu(v) + \beta\nu(u),$$

in zato je po izreku 1 ničelna preslikava linearna preslikava.

Primer 2. *Identična preslikava*

$$\begin{aligned} \iota : V &\to V \\ v &\mapsto v, \end{aligned}$$

je preslikava, ki slika vsak vektor vektorskega prostora V nazaj vase. Ker za vse $v, u \in V$ in vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$\iota(\alpha v + \beta u) = \alpha v + \beta u = \alpha\,\iota(v) + \beta\,\iota(u),$$

je po Izreku 1 identična preslikava linearna preslikava.

Primer 3. *Dan je vektor* $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$*. Naj bo preslikava* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dana s predpisom*

$$\mathcal{A}\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \vec{x} \times \vec{a} - 2\vec{x}.$$

Ker za vsaka vektorja $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ *in poljubni števili* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *velja*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= ((\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot \vec{a})\,\vec{a} + (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \times \vec{a} - 2(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \\
&= (\alpha\vec{x} \cdot \vec{a} + \beta\vec{y} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \alpha\vec{x} \times \vec{a} + \beta\vec{y} \times \vec{a} - 2\alpha\vec{x} - 2\beta\vec{y} = \\
&= \alpha\,(\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + (\beta\vec{y} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \alpha\vec{x} \times \vec{a} + \beta\vec{y} \times \vec{a} - 2\alpha\vec{x} - 2\beta\vec{y} = \\
&= \alpha\,((\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \vec{x} \times \vec{a} - 2\vec{x}) + \beta\,((\vec{y} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \vec{y} \times \vec{a} - 2\vec{y}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y}),
\end{aligned}$$

je po izreku 1 preslikava $\mathcal{A}$ *linearna.*

Izrek 2. *Za poljubno matriko* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *je preslikava*

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\
\vec{x} &\mapsto A\vec{x}.
\end{aligned}$$

linearna preslikava.

Dokaz.

$$\psi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} = \alpha\psi(\vec{x}) + \beta\psi(\vec{y})$$

za poljubna vektorja $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ter poljubni števili $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja in zatorej po izreku 1 sledi, da je ψ linearna preslikava. □

S tem smo pokazali, da je vsaka preslikava, ki vektorje iz $\mathbb{R}^n$ množi z dano matriko (primerne velikosti) linearna preslikava.

Primer 4. *Naj bosta* $\chi, \varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *preslikavi, podani z predpisoma*

$$\chi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 2x \\ z + 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2y - z \\ 4x - 6y - 2z \\ x + 5y \end{bmatrix}.$$

Katera od preslikav χ, φ *je linearna?*

Najprej opazimo, da za preslikavo χ *velja*

$$\chi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

in zato po Lemi 1 ni linearna. Predpis preslikave φ *lahko zapišemo tudi kot*

$$\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2y - z \\ 4x - 6y - 2z \\ x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Spomnimo se, da smo v izreku 2 pokazali, da je vsaka preslikava, ki deluje kot matrično množenje, linearna. Iz tega sledi, da je φ *linearna.*

Poglejmo si še nekaj primerov preslikav, ki niso linearne:

Premik (ali translacija) vektorskega prostora V za vektor $w \in V$ je preslikava, podana s predpisom

$$\begin{aligned} \tau : V &\to V \\ v &\mapsto v + w. \end{aligned}$$

Če $w \neq \mathbf{0}$, potem je $\tau(\mathbf{0}) = \mathbf{0} + w = w \neq \mathbf{0}$ in τ ne ohranja ničelnega vektorja. Zatorej po lemi 1 premik ni linearna preslikava.

4. Matrika linearne preslikave v standardni bazi

Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava ter $\mathcal{S}_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ in $\mathcal{S}_m = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ standarni bazi prostorov $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$,

Denimo, da poznamo slike $\tau(e_1), \tau(e_2), \ldots, \tau(e_n)$ vektorjev baze $\mathcal{S}_n$ preko preslikave τ. Izberimo poljubni vektor $v \in V$ in ga zapišimo kot linearno kombinacijo

$$v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

baznih vektorjev množice $\mathcal{S}_n$. Ker je τ linearna preslikava, lahko nato sliko $\tau(v)$ vektorja izračunamo kot

$$\tau(v) = \tau\left(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_m e_n\right) = \beta_1 \tau(e_1) + \beta_2 \tau(e_2) + \ldots + \beta_n \tau(e_n).$$

Tako smo ugotovili, da lahko s pomočjo slik baznih vektorjev izračunamo sliko poljubnega vektorja $v \in V$.

Ko bazni vektor e_j baze $\mathcal{S}_n$ preslikamo s preslikavo τ, se slika $\tau(e_j)$ nahaja v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^m$. Zato lahko $\tau(e_j)$ razvijemo po standardni bazi $\mathcal{S}_m$ prostora $\mathbb{R}^m$. Torej, za $j = 1, \ldots, n$, vsako sliko $\tau(e_j)$ zapišimo kot linearno kombinacijo vektorjev množice $\mathcal{S}_m = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$:

$$\tau(e_j) = \alpha_{1j} e'_1 + \alpha_{2j} e'_2 + \ldots + \alpha_{mj} e'_m.$$

S tem smo dobili $m \cdot n$ enolično določnih koeficientov α_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Naj bo $A_{\tau, \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m} = [\alpha_{ij}]$ matrika reda $n \times m$ sestavljena iz koeficientov v razvoju slik baznih vektorjev $\mathcal{S}_n$ po bazi $\mathcal{S}_m$.

Tako definirano matriko

$$A_\tau = A_{\tau, \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

imenujemo *matrika linearne preslikave τ iz baze $\mathcal{S}_n$ v bazo $\mathcal{S}_m$*.

V njej j-ti stolpec predstavlja koeficiente, s katerimi se slika j-tega vektorja baze $\mathcal{S}_n$ izraža kot linearna kombinacija vektorjev baze $\mathcal{S}_m$.

Primer 5. *Kakšne je matrika ničelne preslikave* $\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*?*

Ničelna preslikava slika vsak vektor $e_j \in V$*,* $j = 1, 2, \ldots, n$ *standardne baze* $\mathbb{R}^n$ *v ničelni vektor* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$*. Da bi zapisali matriko* A_ν *ničelne preslikave* ν *v standardnih bazah, moramo slike* $\tau(e_j) = 0 \in \mathbb{R}^m$ *baznih vektorjev* $e_j \in \mathcal{B}$ *razviti po bazi* $\mathcal{C}$ *prostora* $\mathbb{R}^n$*. Preprosto zapišemo*

$$\tau(e_j) = 0 = 0 \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' + \ldots + 0 \cdot e_m'$$

za $j = 1, 2, \ldots, n$*. S tem smo dobili koeficiente v razvoju slik baznih vektorjev, ki so vsi enaki 0. Zatorej je matrika ničelne preslikave* ν *enaka*

$$A_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Primer 6. *Za vektor* $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *naj bo podana preslikava* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *s predpisom*

$$\mathcal{A}\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \vec{x} \times \vec{a} - 2\vec{x},$$

kot v primeru 3. Določimo matriko, ki pripada $\mathcal{A}$ *v standardni bazi prostora* $\mathbb{R}^3$*.*

V ta namen moramo izračunati, kam se s preslikavo $\mathcal{A}$ *slikajo vektorji* $\vec{i}$*,* $\vec{j}$ *in* $\vec{k}$*, torej vektorji standardne baze* $\mathbb{R}^3$*. Velja*

$$\mathcal{A}(\vec{i}) = (\vec{i} \cdot \vec{a})\vec{a} + \vec{i} \times \vec{a} - 2\vec{i} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = -1\,\vec{i} - 1\,\vec{j} + 5\,\vec{k},$$

$$\mathcal{A}(\vec{j}) = (\vec{j} \cdot \vec{a})\vec{a} + \vec{j} \times \vec{a} - 2\vec{j} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 5\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\,\vec{k},$$

$$\mathcal{A}(\vec{k}) = (\vec{k} \cdot \vec{a})\vec{a} + \vec{k} \times \vec{a} - 2\vec{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 1\,\vec{i} + 7\,\vec{j} + 7\,\vec{k},$$

zato je matrika, ki pripada $\mathcal{A}$ *v standardni bazi prostora* $\mathbb{R}^3$ *enaka*

$$A_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

5. Jedro in slika linearne preslikave

Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava vektorskega prostora V v vektorski prostor U.

Jedro linearne preslikave τ je množica $\ker(\tau)$ vseh vektorjev $v \in V$, za katere velja
$$\tau(v) = 0.$$

Slika linearne preslikave je množica $\operatorname{im}(\tau) = \{\tau(v)\colon v \in V\} \subseteq U$.

Izrek 3. *Jedro* $\ker \tau$ *linearne preslikave* $\tau\colon V \to U$ *je vektorski podprostor v* V*, slika* $\operatorname{im} \tau$ *pa vektorski podprostor v* U*.*

Izrek 4. *Naj bo* $\tau\colon V \to U$ *linearna preslikava in naj bo* A *matrika, ki pripada preslikavi* τ*. Potem je*

(1) $\dim(\operatorname{im}(\tau)) = \operatorname{rang}(A)$,
(2) $\dim(\ker(\tau)) + \dim(\operatorname{im}(\tau)) = \dim(V)$.

6. Ali razumem snov?

(1) Pokažite Izrek 3.
(2) Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U.
  (a) Pokažite, da je τ injektivna natanko tedaj, ko je $\ker \tau = \{0\}$.
  (b) Pokažite, da je τ surjektivna natanko tedaj, ko je $\operatorname{im} \tau = U$.
(3) Za linearno preslikavo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ naj velja $\tau(a) = b$, $\tau(b) = c$ ter $\tau(c) = b + c$ za neke vektorje $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Določite $\tau(a + 3b - 3c)$.
(4) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, podana s predpisom
$$\tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ z \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Zapišite matriko, ki pripada τ v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.
(5) Naj bo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki slika vektor $\vec{i}$ v $\vec{j}$, vektor $\vec{j}$ v $\vec{0}$, vektor $\vec{k}$ pa v $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Zapišite matriko, ki pripada T v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.
(6) Pokažite, da vsaka linearna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slika linearno odvisne vektorje v linearno odvisne.
(7) Drži ali ne drži?
  (a) Če poznamo slike baznih vektorjev z linearno preslikavo $\psi\colon U \to V$, potem za vsak vektor $u \in U$ poznamo $\psi(u)$.
  (b) Če je preslikava $\varphi\colon U \to U$ linearna, potem je linearna tudi preslikava $\varphi^2\colon U \to U$.

(c) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki slika vektor $\vec{i}$ v $\vec{j}$, vektor $\vec{j}$ v $\vec{i}+\vec{j}$, vektor $2\vec{k}$ pa v $4\vec{i}$. Zapišite matriko, ki pripada τ v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.
(d) Vsaka neničelna linearna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slika linearno neodvisna vektorja v linearno neodvisna.

(8) Za vsako od naslednjih lastnosti poiščite primer linearne preslikave $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki ima to lastnost.
(a) θ^2 je identična preslikava.
(b) $\theta^2 = \theta$.
(c) Jedro preslikave θ je trivialno.
(d) Obstaja vektor $v \in \mathbb{R}^3$, za katerega velja $\theta(v) = -v$.

(9) Za vsako od naslednjih lastnosti poiščite primer linearne preslikave $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, ki ima to lastnost.
(a) φ^2 je identična preslikava.
(b) $\varphi^2 = \varphi$.
(c) Jedro preslikave φ je trivialno.
(d) Obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^3$, za katero velja $\varphi(A) = -A$.

(10) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 5.

7. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) 3Blue1Brown, Essence of linear algebra,
(a) Linear transformations and matrices.
(b) Three-dimensional linear transformations.
(c) Nonsquare matrices as transformations between dimensions.
(d) Matrix multiplication as composition.

(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 7.

(3) Polona Oblak: Matematika, razdelek 6.5.

(4) Tomaž Košir: Linearna algebra, linearne preslikave, študijsko gradivo, 2007.