Linearna algebra **Teden 6**

Vektorski prostor, linearna neodvisnost in baze

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Linearna neodvisnost.
- Baza vektorskega prostora.
- Standardni bazi $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{m\times n}$.
- Dimenzija vektorskega prostora.
- Ničelni in stolpčni prostor matrike.

2. Ekvivalentne definicije obrnljive matrike

Naslednje trditve o matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so ekvivalentne:

(1) A je obrnljiva.
(2) Homogeni sistem enačb $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev $x = 0$.
(3) Sistem enačb $Ax = b$ ima enolično rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.
(4) Reducirana vrstična stopničasta oblika matrike A je I.
(5) Rang matrike A je n.
(6) Stolpci matrike A so linearno neodvisni.
(7) Vrstice matrike A so linearno neodvisne.
(8) Stolpci matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
(9) Vrstice matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
(10) Stolpci matrike A so baza $\mathbb{R}^n$.
(11) Vrstice matrike A so baza $\mathbb{R}^n$.
(12) $\dim N(A) = 0$.
(13) $\dim C(A) = n$.

3. Ali razumem snov?

(1) Razmislite, zakaj je zgornjih trinajst trditev o obrnljivih matrikah ekvivalentnih.
(2) Pokažite, da je sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ rešljiv natanko tedaj, ko je $\vec{b} \in C(A)$.
(3) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{7\times 4}$ štiri linearno neodvisne vrstice. Koliko rešitev ima lahko linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$?
(4) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrika, katere stolpci so linearno neodvisni. Izračunajte $\dim N(A)$.

(5) Če je $A \in \mathbb{R}^{7\times 11}$ matrika ranga 5, izračunajte $\dim N(A)$. Naj bo A neničelna matrika velikosti 3×8 in $d = \dim N(A)$. Zapišite vse možne vrednosti števila d.
(6) Drži ali ne drži?
   (a) Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ baza prostora V.
   (b) Vsaka linearno neodvisna množica vektorjev v $\mathbb{R}^9$ vsebuje vsaj 9 elementov.
   (c) Če sta prvi in drugi stolpec matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ linearno odvisna vektorja, potem matrika A ni obrnljiva.
   (d) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.
   (e) Vsaka baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 4}$ ima največ 4 elemente.
   (f) Če je U linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_k$, potem vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tvorijo bazo prostora U.
   (g) Če za matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja $\dim N(A) \leq \dim N(B)$, potem je $\dim C(A) \geq \dim C(B)$.
(7) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 55, 57 (a) in (b), 60-64.

4. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Linear combinations, span, and basis vectors.
(2) Polona Oblak: Vektorski prostor in podprostor.
(3) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 3.4.
(4) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 3.
(5) Gilbert Strang, Video Lectures:
   (a) Lecture 6: Column space and nullspace.
   (b) Lecture 9: Independence, basis, and dimension.