Linearna algebra	**Teden 4**

Obrnljivost matrik in njihovi inverzi

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Lastnosti in nelastnosti matričnega množenja. Bločno množenje matrik.
- Obrnljive matrike. Inverz matrike.
- Matrične enačbe.
- Identična matrika. Diagonalna matrika. Zgornje trikotna matrika. Spodnje trikotna matrika.

2. Algoritem za računanje inverza kvadratne matrike

Inverz obrnljive matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s pomočjo Gaussovih elementarnih operacij izračunamo na naslednji način:

(1) Zapišemo zelo razširjeno matriko
$$[A\,|\,I_n] \in \mathbb{R}^{n\times 2n},$$
(2) nato na njej izvajamo Gaussove elementarne operacije.
  (a) V kolikor $\operatorname{rank}(A) < n$, matrika A ni obrnljiva in njen inverz ne obstaja.
  (b) Če je $\operatorname{rank}(A) = n$, potem izvajamo Gaussove elementarne operacije toliko časa, da na prvih n stolpcih pridobimo identično matriko I_n
$$[A\,|\,I_n] \sim \ldots \sim [I_n\,|\,B].$$
  Inverz matrike A je enak $A^{-1} = B$.

Primer: Izračunajmo inverz matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 4 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, če obstaja.

Najprej
$$[A\,|\,I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$
$$\begin{array}{lll} v_2 & \rightsquigarrow & v_2 - 3v_1 \\ v_3 & \rightsquigarrow & v_3 + v_1 \end{array}$$

kar pomeni, da je matrika A ranga 3. Zato je A obrnljiva in nadaljujemo postopek:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl} v_2 & \rightsquigarrow & -v_2 \\ v_3 & \rightsquigarrow & -\frac{1}{2}v_3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} v_1 & \rightsquigarrow & v_1 + v_3 \\ v_2 & \rightsquigarrow & v_2 + 7v_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$v_1 \rightsquigarrow v_1 - 3v_2$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

S tem smo izračunali, da je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3. Ali razumem snov?

(1) Drži ali ne drži?
   - (a) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi matriki. Za vsako $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima enačba $AXB^{-1} = C$ natanko eno rešitev.
   - (b) Za vsako 4×4 matriko, ki ima zadnjo vrstico enako prvi, velja, da ni obrnljiva.
   - (c) Če sta kvadratni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi in velja $(AB)^2 = A^2B^2$, potem velja $AB = BA$.
   - (d) Vsaka zgornje trikotna matrika je obrnljiva.
   - (e) Če je matrika A obrnljiva, ima sistem $Ax = b$ neskončno rešitev.

(2) Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva. Ali obstaja obrnljiva matrika $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katero velja $AXA + A = 0$?

(3) Če sta A in B obrnljivi $n \times n$ matriki, katere od naslednjih trditev so resnične?

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$	(d) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$
(b) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$	(e) AB je obrnljiva
(c) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$	(f) $A + B$ je obrnljiva

(4) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 31-35, 40-42.

4. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 2.3.
(2) Polona Oblak: Matematika, Razdelek 6.3.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 2.5.
(4) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Sections 3.1, 3.2., 3.3..