Linearna algebra **Teden 2**

Vektorji v $\mathbb{R}^3$, 2. del

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Skalarni produkt, koti med vektorji, pravokotnost
- Projekcije vektorjev.
- Vektorski produkt.
- Enačba ravnine.
- Mešani produkt.

2. Ali razumem snov?

(1) Uporabite lastnosti skalarnega produkta, da za poljubna vektorja $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ pokažete trikotniško neenakost

$$||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||.$$

(2) Uporabite definicijo vektorskega produkta, da za poljubne vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ ter $\alpha \in \mathbb{R}$ pokažete distributivnost

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

ter homogenost

$$\vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha\, \vec{a} \times \vec{b} = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b}$$

vektorskega produkta.

∗ (3) Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ poljubni vektorji v $\mathbb{R}^3$.

(a) Geometrisko utemeljite, zakaj vektorski produkt ni asociativna operacija.

(b) Geometrijsko razmislite, zakaj je vektor $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(c) Računsko pokažite, da velja formula o dvojnem vektorskem produktu

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}.$$

(d) Iz formule o dvojnem vektorskem produktu lahko izpeljete tudi enakost $||\vec{a} \times \vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2\, ||\vec{b}||^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$.

(4) Če sta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ neničelna vektorja, kateri od naslednjih vektorjev je vedno pravokoten na vektor $\vec{a}$?

(a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$
(b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$
(c) $\mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$
(d) $\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$
(e) $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$
(f) $\vec{b} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$
(g) $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$
(h) $\vec{b} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$

(5) Drži ali ne drži?
   (a) Če sta premica p in ravnina Σ v $\mathbb{R}^3$ pravokotni, potem je vsak vektor na premici p vzporeden z normalo na ravnino Σ.
   (b) Če sta $u, v \in \mathbb{R}^3$ neničelna vektorja, ki oklepata kot $\frac{\pi}{3}$, potem sta vektorja $\mathrm{proj}_u v$ in $\mathrm{proj}_v u$ nekolinearna.
   (c) Ploščina paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{a} - \vec{b}$ je dvakratnik ploščine, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ ter $\vec{b}$.

(6) Naj bosta $A(x, y, z)$ in $B(z, x, y)$ poljubni neničelni točki na ravnini $x + y + z = 0$. Izračunajte kot med krajevnima vektorjema točk A in B.

(7) Enotska vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\frac{\pi}{4}$. Izračunajte prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b}$ ter $\vec{a} \times \vec{b}$.

(8) Naj bo Σ ravnina z normalo $\vec{n}$ in naj točka A leži na ravnini Σ. Naj točka T **ne** leži na ravnini Σ.
   (a) Razdalja točke T do ravnine Σ enaka dolžini projekcije vektorja ______________ na vektor ______________.
   (b) Kako bi s pomočjo točk A, T ter normale $\vec{n}$ izračunali kot med vektorjem $\vec{AT}$ in ravnino Σ?
   (c) Izračunajte razdaljo točke T do ravnine Σ.

(9) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 1.

3. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 1.
(2) Polona Oblak: Matematika, Poglavje 5.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 1.
(4) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Chapter 12.
(5) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Chapter 1.
(6) 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Cross product