Linearna algebra	**Teden 14**

Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik, 3. del

Polona Oblak

1. Poudarki 14. tedna

- *Razcep singularnih vrednosti (SVD)*
  - Uvod, video.
  - Kaj sploh je razcep singularnih vrednosti in kako ga uporabiti, video.
  - Primer računanja približkov matrik s pomočjo SVD, video.
  - Motivacija: poglejte si, kako in zakaj boste kdaj v prihodnosti želeli zmanjšati velikost (dimenzije) podatkov, predavanje Jure Leskovec: Lecture 46 - Dimensionality Reduction - Introduction.
  - Tehnična izvedba:
    - $A^T A$ je simetrična matrika z nenegativnimi lastnimi vrednostmi, video.
    - Diagonalni elementi diagonalne matrike Σ so koreni lastnih vrednosti matrike $A^T A$, video.
    - Stolpci matrik U in V so lastni vektorji matrik AA^T in $A^T A$, video.
      - Matriki AB in BA se ujemata v neničelnih lastnih vrednostih, video.
    - Singularne vrednosti, video.
  - Tri oblike razcepa singularnih vrednosti (SVD), video.
  - Primer razcepa simetrične matrike, video.
  - Geometrija SVD in PCA, video.
  - Igrajte se sami z demonstracijo SVD, Mathematica Demonstration.
  - Jure Leskovec: Lecture 47 - Singular Value Decomposition.
  - Jure Leskovec: Lecture 48 - Dimensionality Reduction with SVD.
- *Markovske verige*
  - Uvod, video.
  - Matrika prehodnih stanj, video.
  - Potence matrike prehodnih stanj, video.
  - Primer v Mathematici, video.
  - Zaključek, video.
- Zapiski predavanj, 14. teden.

2. Ali razumem snov?

(1) Izračunajte singularne vrednosti matrike $A = \left[A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, katere stolpci $A^{(i)}$ so paroma pravokotni z dolžinami $||A^{(i)}|| = \alpha_i$.

(2) Naj bo $A = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika.
   (a) Pokažite, da so vse singularne vrednosti matrike A neničelne.
   (b) Pokažite, da je Σ obrnljiva matrika.
   (c) Zapišite razcep singularnih vrednosti matrike A^{-1}.

(3) Drži ali ne drži?
   (a) Če je $A = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, kjer $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ter $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalni matriki, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pa diagonalna matrika z diagonalnimi elementi $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, potem so $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ lastne vrednosti matrike AA^T.
   (b) Če je A simetrična matrika s samimi pozitivnimi lastnimi vrednostmi, potem so singularne vrednosti matrike A enake lastnim vrednostim matrike A.
   (c) Če je $A = QR \in \mathbb{R}^{n\times n}$ QR razcep matrike A, potem se singularne vrednosti matrik A in R ujemata.

(4) Naj bo A matrika z nenegativnimi elementi, ki ima vsoto elementov v vsakem stolpcu enako 1.
   (a) Pokažite, da ima matrika A^T lastno vrednost 1.
   (b) Pokažite, da ima matrika A lastno vrednost 1.
   (c) Pokažite, da za vsako lastno vrednost λ matrike A^T velja $|\lambda| \leq 1$.
   (d) Pokažite, da za vsako lastno vrednost λ matrike A velja $|\lambda| \leq 1$.

3. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 6.5.
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 6.7.
(3) Gilbert Strang, Lecture 29: Singular value decomposition,
(4) Gilbert Strang: Singular Value Decomposition (the SVD),