Linearna algebra **Teden 13**

Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik, 2. del

Polona Oblak

1. Poudarki 13. tedna

- Lastne vrednosti matrike se ne ohranjajo z Gaussovo eliminacijo,video.
- *Podobnost matrik.*
  - Definicija. Matriki A in B sta *podobni*, če velja $A = PBP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P, video.
  - Podobni matriki imata enak karakteristični polinom, video.
  - Obrat ne velja: obstajajo matrike z enakim karakterističnim polinomom, ki pa niso podobne, video.
  - Če sta si matriki A in B podobni, potem
    - imata enake lastne vrednosti,
    - $\det(A) = \det(B)$,
    - $\mathrm{sled}(A) = \mathrm{sled}(B)$ in
    - $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.
    - video.
- *Diagonalizacija matrik*.
  - Definicija. Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *diagonalizabilna*, če je podobna kakšni diagonalni matriki. T.j., če obstajata takšna diagonalna matrika $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in takšna obrnljiva matrika $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da velja $A = PDP^{-1}$, video.
  - Primer nediagonalizabilne matrike, video
  - Če je matrika A diagonalizabilna in $A = PDP^{-1}$, potem so
    - diagonalni elementi matrike D natanko lastne vrednosti matrike A,
    - stolpci matrike P natanko lastni vektorji matrike A (zapisani v pripadajočem vrstnem redu lastnih vrednosti v matriki D).
    - video.
  - Matriko A je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko lahko najdemo bazo prostora $\mathbb{R}^n$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A. (Torej natanko tedaj, ko je večkratnost vsake lastne vrednosti λ kot ničle karakterističnega polinoma matrike A enaka dimenziji pripadajočega lastnega podprostora $\dim N(A-\lambda I)$.) video.
  - Še en primer nediagonalizabilne matrike, video.
  - Primer diagonalizabilne matrike, video.
  - Računanje potenc diagonalizabilnih matrik, video.

- *Lastne vrednosti in lastni vektorji simetričnih matrik*
  - Lastne vrednosti simetričnih matrik so realne, video.
  - Lastni vektorji simetričnih matrik tvorijo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^n$, video.
  - Spektralni razcep simetričnih matrik, video.
- Zapiski predavanj, 13. teden.

2. Ali razumem snov?

(1) Naj bo matrika A diagonalizabilna. Pokažite, da je rang matrike A enak številu njenih neničelnih lastnih vrednosti.

(2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simetrična matrika z lastnimi vrednostmi 1, 2 in 3. Lastni vektor pri lastni vrednosti 1 je enak $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, lastni vektor pri lastni vrednosti 2 pa $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Zapišite lastni vektor pri lastni vrednosti 3.

(3) Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Izračunajte $\operatorname{rang}(A + I)$.

(4) Denimo, da je matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična ter $A = B^2$. Pokažite, da so vse lastne vrednosti matrike A nenegativne.

(5) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.
   (a) Če je matrika A diagonalizabilna, potem je tudi obrnljiva.
   (b) Vsaka simetrična $n \times n$ matrika ima n različnih lastnih vrednosti.
   (c) Vsaka simetrična $n\times n$ matrika ima n realnih lastnih vrednosti.
   (d) Vsaka simetrična matrika je diagonalizabilna.
   (e) Vsaka simetrična matrika je obrnljiva.
   (f) Lastni vektorji $n \times n$ simetrične matrike z večkratnimi lastnimi vrednostmi ne tvorijo baze $\mathbb{R}^n$.
   (g) Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizabilna, potem je vsak vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lastni vektor matrike A.
   (h) Matrika $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ima edini lastni vrednosti enaki 1 in -1. Če je $\operatorname{rang}(A + I) = 1$, potem je A diagonalizabilna.
   (i) Matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ je diagonalizabilna.

(6) Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor.
   (a) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^T$ simetrična matrika.

(b) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^T$ matrika ranga 1.
(c) Pokažite, da je vektor $\vec{a}$ lastni vektor matrike $\vec{a}\vec{a}^T$. Določite pripadajočo lastno vrednost.
(d) Zapišite vse lastne vrednosti matrike $\vec{a}\vec{a}^T$.
(e) Naj bo $\vec{a}$ lastni vektor simetrične matrike A. Pokažite, da matriki A in $\vec{a}\vec{a}^T$ komutirata.

$\lightning$ (7) S pomočjo matematične indukcije na velikost matrike n pokažite, da velja naslednji izrek.

Izrek 1 (Schurov izrek o trikotni podobnosti matrik)**.** *Naj bo A poljubna $n\times n$ realna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Potem obstaja takšna ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je*

$$Q^T AQ = T,$$

kjer je T zgornje trikotna matrika z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

(a) Najprej pokažite, da trditev velja za $n = 1$ ☺.
(b) Predpostavite, da trditev velja za nek n. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$. Izberite lastno vrednost λ_1 in pripadajoči lastni vektor v dolžine 1. Naj bo U poljubna ortogonalna matrika, ki ima prvi stolpec enak v.
   (i) Pokažite, da je $v^T Av = \lambda_1$.
   (ii) Pokažite, da je $U^{-1}AU = \left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & u^T \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right]$.
   (iii) Uporabite indukcijsko predpostavko na $n \times n$ matriki B: $R^T BR = T_n$.
   (iv) Definirajte $S = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & R \end{array}\right]$ ter $Q = US$ in pokažite, da je Q ortogonalna matrika, za katero je $Q^T AQ = T$, kjer je T zgornje trikotna matrika z diagonalnimi elementi enakimi lastnim vrednostim matrike A.

(8) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 85-86, 88-89,92-95, 97, 99, 101.

3. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelka 6.3 (brez 6.3.2) in 6.4 (brez 6.4.2).
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Sections 6.2, 6.4 in 6.6.
(3) Gilbert Strang, Video Lectures:
   - Lecture 22: Diagonalization and powers of A,
   - Lecture 25: Symmetric matrices and positive definiteness (prvih 29 minut),
   - Lecture 28: Similar matrices and jordan form (prvih 31 minut).