

Ortogonalnost, 2. del

Polona Oblak

1. POUDARKI 11. TEDNA

- Matrike z ortonormiranimi stolpci
 - Matrike z ortonormiranimi stolpci, matrika projekcije, video.
 - Primer pravokotne projekcije, video.
 - Ortogonalna matrike, video.
- QR razcep matrike
 - Razcep, video.
 - Primer, video.
 - Nadaljnje variante QR razcepa, video.
- Predoločeni sistemi
 - Kaj so sploh predoločeni sistemi? video.
 - Najboljši približek rešitve predločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov, video.
 - Poglejte si lepšo in gibljivo sliko, kaj je najboljši približek predločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov. Wolfram Demonstrations Project.
 - Primer, video.
 - Kaj pa v primeru, ko je predločeni sistem podan z matriko polnega ranga? video.
- Zapiski predavanj.

2. ALI RAZUMEM SNOV?

(1) Pokažite, da sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}$$

ortogonalni za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$. (Dodatna naloga: Kaj predstavljata preslikavi množenja vektorja z matrikama A ali B ?)

- (2) Zapišite primer matrike, ki ima paroma ortogonalne stolpce, vendar ni ortogonalna matrika.
- (3) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protiprimer.
- (a) Če je P matrika, katere stolpci so paroma ortogonalni, velja $P^{-1} = P^T$.

- (b) Če je $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalna matrika, potem je $\|Qx\| = \|x\|$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$.
 - (c) Če je neničelni vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ na vektorski podprostor $U \subset \mathbb{R}^n$, potem sta vektorja \vec{x} in \vec{y} pravokotna.
 - (d) Če so stolpci matrike $U \in \mathbb{R}^{n \times r}$ normirani vektorji in tvorijo ortogonalno množico, potem je $UU^T \vec{x}$ pravokotna projekcija vektorja \vec{x} na $C(U)$.
 - (e) Če je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, kjer $m > n$, potem linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev.
 - (f) Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ranga n in $m \geq n$, potem je najboljša rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ po metodi najmanjših kvadratov enaka $\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$.
- (4) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, 6. poglavje.

3. KJE SI LAHKO PREBEREM/OGLEDAM SNOV?

- (1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 4
- (2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 4.
- (3) Gilbert Strang, Video Lectures:
 - (a) Lecture 15: Projections onto subspaces.
 - (b) Lecture 16: Projection matrices and least squares.
 - (c) Lecture 17: Orthogonal matrices and Gram-Schmidt